




PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

Juego del SALTO DEL CABALLO (Juega, observa y obtén conclusiones)

elaborado con GeoGebra por Lorenzo Lozano Jiménez como material presentado para una comunicación en las *Jornadas de intercambios de experiencias: Encuentros en GeoGebra 4*, que tuvieron lugar el sábado 25 de mayo de 2013 en I.E.S. Salvador Dalí, en Madrid.

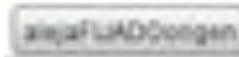


Indicaciones y material para trabajar el proyecto:

- *Pensado para ser trabajado con alumnos de 3º E.S.O en Matemáticas.*
- *Contenidos que se trabajan en este proyecto:*
 - coordenadas de un punto en el plano cartesiano (abscisa, ordenada),
 - puntos alineados con el origen de coordenadas,
 - función de proporcionalidad directa (ecuación en forma explícita $y = mx$),
 - pendiente de una recta que pasa por el origen de coordenadas,
 - obtención de la fracción irreducible equivalente a una dada (dividiendo su numerador y denominador entre el máximo común divisor de los mismos).

Vamos a simular que tenemos **un caballo del ajedrez**  situado en el ORIGEN de coordenadas (0,0), que se podrá mover sólo a puntos de coordenadas enteras positivas del primer cuadrante y siguiendo la forma , según el vector $u = (\text{DespHORIZderecha}, \text{DespVERTarriba})$ que tiene por coordenadas números enteros positivos. Por ejemplo, si $u = (1,2)$, entonces quiere decir que en cada movimiento el caballo avanza 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. El **objetivo del caballo** es **llegar al punto R** (de coordenadas enteras positivas) para así **“comerse al REY”** .

El alumno debe abrir el archivo de GeoGebra **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html** y con él debe responder a TODAS las cuestiones que vienen más abajo.

Antes de comenzar a responder las cuestiones, lee estas **OBSERVACIONES IMPORTANTES:**

1. Puedes pinchar con el ratón sobre los botones  y  (que están en la ventana gráfica debajo del eje de abscisas) para que puedas ver los puntos que no aparezcan en la ventana gráfica.
2. Para volver a hacer cualquier cuestión, puedes reiniciar el archivo **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html** pinchando en el icono **Reinicio de Construcción**  que aparece en la esquina superior derecha de la ventana gráfica de GeoGebra.

Cuestión 1: (IMPORTANTE: en esta cuestión SIEMPRE $u = (1,2)$)

(Para responder a las preguntas que aparecen en esta cuestión 1, *usa la ventana gráfica* de GeoGebra del archivo **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html**. Pincha con el ratón sobre el deslizador numSALTOS y desplázalo poco a poco de izquierda a derecha para ver los puntos por donde pasa el caballo, puedes también mover ese deslizador usando las *teclas CURSOR* del teclado).

1.1. ¿Cómo están situados los puntos VERDES a los que puede llegar el caballo?

1.2. Completa la tabla siguiente

	Abscisa o coordenada x	Ordenada o coordenada y	Fracción o cociente y/x
En el <i>primer salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>segundo salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>tercer salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>cuarto salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>quinto salto</i> llega al punto (... , ...)			

1.3. Observa la columna (Fracción o cociente y/x) de la tabla anterior que has completado.

¿Cómo son las fracciones o cocientes y/x de los puntos donde llega el caballo?

1.4. Pincha con el puntero sobre la casilla de control *Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo* y aparecerá dibujada la recta que une el ORIGEN con cualquiera de los puntos donde salta el caballo.

¿Qué ecuación explícita del tipo $y = m \cdot x$ tiene esta recta según GeoGebra?

¿Qué valor numérico toma m?

¿Qué relación de igualdad tiene m con las coordenadas de u y los cocientes y/x de la tabla anterior?

Cuestión 2: (IMPORTANTE: en esta cuestión SIEMPRE $u = (1,2)$)

Pincha con el ratón sobre las casillas de entrada **abscisa de R** y **ordenada de R** y escribe las coordenadas enteras correspondientes en cada caso para responder a las siguientes preguntas. (*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión 2, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender).

2.1. Si queremos llegar con el caballo desde el ORIGEN al punto R (4,8) (*dando un número finito de saltos según el vector u*), entonces ¿podemos hacerlo? ¿Por qué? ¿Cuántos saltos serían necesarios?

2.2. Si queremos llegar con el caballo desde el ORIGEN al punto R (6,10) (*dando un número finito de saltos según el vector u*), ¿podemos hacerlo? ¿Por qué? ¿Cuántos saltos serían necesarios?

2.3. Completa la tabla (para responder usa las casillas de control: **Muestra la recta que une el ORIGEN de coordenadas y el punto R** y **Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo**. Activando estas casillas podrás encontrar pintadas las rectas y sus ecuaciones):

PUNTO R (x,y)	¿El caballo llega hasta el punto R? Sí ó No	Si la respuesta es SÍ , ¿en cuántos saltos o movimientos?	Calcula el cociente y/x	Ecuación del tipo $y = m \cdot x$ de la recta AZUL	Ecuación del tipo $y = m \cdot x$ de la recta VERDE
(5,7)					
(8,16)					
(9,9)					
(10,20)					

2.4. Según las respuestas de la tabla anterior,

¿observas alguna relación entre las coordenadas de u y R cuando SÍ se puede llegar hasta R saltando según u ?

¿observas alguna relación entre las coordenadas de u y R cuando NO se puede llegar hasta R saltando según u ?

Cuestión 3: (Pincha con el ratón sobre las casillas de entrada **abscisa de R** y **ordenada de R** y escribe las coordenadas enteras correspondientes en cada caso para responder a las siguientes preguntas. **Mueve los deslizadores** *DespHORIZderecha*, *DespVERTarriba* y *numSALTOS* para ayudarte a encontrar las respuestas de esta cuestión 3)

3.1. Si queremos llegar al punto R (6,15) en 3 saltos, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar hasta R desde el ORIGEN?** Tu respuesta: $u = (\dots, \dots)$

3.2. Completa:

- Desde el ORIGEN hasta R (9,6) en 1 salto, el salto del caballo debe ser $u = (\dots, \dots)$.
- Desde el ORIGEN hasta R (9,6) en 3 saltos, el salto del caballo debe ser $u = (\dots, \dots)$.
- Desde el ORIGEN hasta R (12, 20) en 2 saltos, el salto del caballo debe ser $u = (\dots, \dots)$.
- Desde el ORIGEN hasta R (12, 20) en 4 saltos, el salto del caballo debe ser $u = (\dots, \dots)$.

Cuestión 4: (*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender)

4.1. Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (18, 24) **en el mayor número posible de saltos**, entonces ¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R? ¿en cuántos saltos llegas a R?

Respuesta: $u = (\dots, \dots)$ y el mayor número posible de saltos es

4.2. Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (20, 15) **en el mayor número posible de saltos**, entonces ¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?

Respuesta: $u = (\dots, \dots)$ y el mayor número posible de saltos es

4.3. Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (8, 8) **en el mayor número posible de saltos**, entonces ¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?

Respuesta: $u = (\dots, \dots)$ y el mayor número posible de saltos es

4.4. Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (9, 10) **en el mayor número posible de saltos**, entonces ¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?

Respuesta: $u = (\dots, \dots)$ y el mayor número posible de saltos es

Cuestión 5:

(*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto_del_caballo_para_JORNADAS_del_25_5_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender)

Tenemos los 5 puntos del plano (x,y):

$$(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5).$$

5.1. ¿Qué coordenadas enteras pondrías a $u = (\text{DespHORIZderecha}, \text{DespVERTarriba})$ para que el caballo pase por esos 5 puntos? (*Ayuda:* usa los deslizadores **DespHORIZderecha**, **DespVERTarriba** y **numSALTOS** para encontrar tu respuesta).

Tu respuesta: $u = (\dots, \dots)$.

5.2. ¿Qué relación $y = m \cdot x$ cumplen los 5 puntos? (*Ayuda:* una vez encontrada la respuesta a la pregunta 5.1., activa las casillas de control **Muestra la recta que une el ORIGEN de coordenadas y el punto D** y **Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo** y **observa** las dos rectas)

Tu respuesta:

5.3. ¿Cuánto vale m ? Tu respuesta $m = \dots\dots$

5.4. ¿Qué relación de igualdad tiene m con: las coordenadas de u (que has encontrado en la respuesta de la pregunta 5.1) y las coordenadas de los 5 puntos dados?

Cuestión 6: Sigue los pasos dados en la cuestión 5 para completar la tabla:

<p>Coordenadas de los PUNTOS por donde <i>debe pasar</i> el caballo</p>	<p>Coordenadas enteras de $u = (x, y)$</p>	<p>Ecuación de la <i>recta VERDE</i> $y = m \cdot x$</p>	<p>Valor de la pendiente m</p>	<p>Relación de igualdad entre m, las coordenadas de u y las coordenadas de los 5 puntos dados (<i>ESCRIBE las igualdades usando fracciones así:</i> $m = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$)</p>
(4,1), (8,2), (12,3), (16,4), (20,5)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,3), (4,6), (6,9), (8,12), (10,15)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(3,3), (6,6), (9,9), (12,12), (15,15)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,6), (4,12), (6,18), (8,24), (10,30)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,8), (3,12), (5,20), (6,24), (8,32)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$