

## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

### *Juego del SALTO DEL CABALLO (Juega, observa y obtén conclusiones)*

elaborado con GeoGebra por Lorenzo Lozano Jiménez como material presentado para una comunicación en las *Jornadas de intercambios de experiencias: Encuentros en GeoGebra 4*, que tuvieron lugar el sábado 25 de mayo de 2013 en I.E.S. Salvador Dalí, en Madrid.

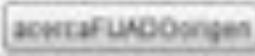
#### Indicaciones y material para trabajar el proyecto:

- *Pensado para ser trabajado con alumnos de 3º E.S.O en Matemáticas.*
- *Contenidos que se trabajan en este proyecto:*
  - coordenadas de un punto en el plano cartesiano (abscisa, ordenada),
  - puntos alineados con el origen de coordenadas,
  - función de proporcionalidad directa (ecuación en forma explícita  $y = mx$ ),
  - pendiente de una recta que pasa por el origen de coordenadas,
  - obtención de la fracción irreducible equivalente a una dada (dividiendo su numerador y denominador entre el máximo común divisor de los mismos).

Vamos a simular que tenemos **un caballo del ajedrez**  situado en el ORIGEN de coordenadas (0,0), que se podrá mover sólo a puntos de coordenadas enteras positivas del primer cuadrante y siguiendo la forma , según el vector  $u = (\text{DespHORIZderecha}, \text{DespVERTarriba})$  que tiene por coordenadas números enteros positivos. Por ejemplo, si  $u = (1,2)$ , entonces quiere decir que en cada movimiento el caballo avanza 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. El **objetivo del caballo** es **llegar al punto R** (de coordenadas enteras positivas) para así **“comerse al REY”** .

El alumno debe abrir el archivo de GeoGebra **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html** y con él debe responder a TODAS las cuestiones que vienen más abajo.

Antes de comenzar a responder las cuestiones, lee estas **OBSERVACIONES IMPORTANTES:**

1. Puedes pinchar con el ratón sobre los botones  y  (que están en la ventana gráfica debajo del eje de abscisas) para que puedas ver los puntos que no aparezcan en la ventana gráfica.
2. Para volver a hacer cualquier cuestión, puedes reiniciar el archivo **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html** pinchando en el icono **Reinicio de Construcción**  que aparece en la esquina superior derecha de la ventana gráfica de GeoGebra.

**Cuestión 1: (IMPORTANTE: en esta cuestión SIEMPRE  $u = (1,2)$ )**

(Para responder a las preguntas que aparecen en esta cuestión 1, *usa la ventana gráfica* de GeoGebra del archivo **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html**. Pincha con el ratón sobre el deslizador numSALTOS y desplázalo poco a poco de izquierda a derecha para ver los puntos por donde pasa el caballo, puedes también mover ese deslizador usando las *teclas CURSOR* del teclado).

**1.1. ¿Cómo están situados los puntos VERDES a los que puede llegar el caballo?**

**1.2. Completa la tabla siguiente**

	Abscisa o coordenada x	Ordenada o coordenada y	Fracción o cociente y/x
En el <i>primer salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>segundo salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>tercer salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>cuarto salto</i> llega al punto (... , ...)			
En el <i>quinto salto</i> llega al punto (... , ...)			

**1.3. Observa la columna (Fracción o cociente y/x) de la tabla anterior que has completado.**

**¿Cómo son las fracciones o cocientes y/x de los puntos donde llega el caballo?**

**1.4. Pincha con el puntero sobre la casilla de control *Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo* y aparecerá dibujada la recta que une el ORIGEN con cualquiera de los puntos donde salta el caballo.**

**¿Qué ecuación explícita del tipo  $y = m \cdot x$  tiene esta recta según GeoGebra?**

**¿Qué valor numérico toma m?**

**¿Qué relación de igualdad tiene m con las coordenadas de u y los cocientes y/x de la tabla anterior?**

**Cuestión 2: (IMPORTANTE: en esta cuestión SIEMPRE  $u = (1,2)$ )**

Pincha con el ratón sobre las casillas de entrada **abscisa de R** y **ordenada de R** y escribe las coordenadas enteras correspondientes en cada caso para responder a las siguientes preguntas. (*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión 2, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender).

**2.1.** Si queremos llegar con el caballo desde el ORIGEN al punto R (4,8) (*dando un número finito de saltos según el vector  $u$* ), entonces ¿podemos hacerlo? ¿Por qué? ¿Cuántos saltos serían necesarios?

**2.2.** Si queremos llegar con el caballo desde el ORIGEN al punto R (6,10) (*dando un número finito de saltos según el vector  $u$* ), ¿podemos hacerlo? ¿Por qué? ¿Cuántos saltos serían necesarios?

**2.3.** Completa la tabla (para responder usa las casillas de control: **Muestra la recta que une el ORIGEN de coordenadas y el punto R** y **Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo**. Activando estas casillas podrás encontrar pintadas las rectas y sus ecuaciones):

PUNTO R (x,y)	¿El caballo llega hasta el punto R? Sí ó No	Si la respuesta es <b>SÍ</b> , ¿en cuántos saltos o movimientos?	Calcula el cociente $y/x$	Ecuación del tipo $y = m \cdot x$ de la <b>recta AZUL</b>	Ecuación del tipo $y = m \cdot x$ de la <b>recta VERDE</b>
(5,7)					
(8,16)					
(9,9)					
(10,20)					

**2.4.** Según las respuestas de la tabla anterior,

**¿observas alguna relación entre las coordenadas de  $u$  y R cuando SÍ se puede llegar hasta R saltando según  $u$ ?**

**¿observas alguna relación entre las coordenadas de  $u$  y R cuando NO se puede llegar hasta R saltando según  $u$ ?**

**Cuestión 3:** (Pincha con el ratón sobre las casillas de entrada **abscisa de R** y **ordenada de R** y escribe las coordenadas enteras correspondientes en cada caso para responder a las siguientes preguntas. **Mueve los deslizadores** *DespHORIZderecha*, *DespVERTarriba* y *numSALTOS* para ayudarte a encontrar las respuestas de esta cuestión 3)

**3.1.** Si queremos llegar al punto R (6,15) en 3 saltos, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar hasta R desde el ORIGEN?** Tu respuesta:  $u = (\dots, \dots)$

**3.2.** Completa:

- Desde el ORIGEN hasta R (9,6) en 1 salto, el salto del caballo debe ser  $u = (\dots, \dots)$ .
- Desde el ORIGEN hasta R (9,6) en 3 saltos, el salto del caballo debe ser  $u = (\dots, \dots)$ .
- Desde el ORIGEN hasta R (12, 20) en 2 saltos, el salto del caballo debe ser  $u = (\dots, \dots)$ .
- Desde el ORIGEN hasta R (12, 20) en 4 saltos, el salto del caballo debe ser  $u = (\dots, \dots)$ .

**Cuestión 4:** (*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender)

**4.1.** Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (18, 24) **en el mayor número posible de saltos**, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R? ¿en cuántos saltos llegas a R?**

Respuesta:  $u = (\dots, \dots)$  y el mayor número posible de saltos es .....

**4.2.** Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (20, 15) **en el mayor número posible de saltos**, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?**

Respuesta:  $u = (\dots, \dots)$  y el mayor número posible de saltos es .....

**4.3.** Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (8, 8) **en el mayor número posible de saltos**, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?**

Respuesta:  $u = (\dots, \dots)$  y el mayor número posible de saltos es .....

**4.4.** Si queremos llegar desde el ORIGEN al punto R (9, 10) **en el mayor número posible de saltos**, entonces **¿qué coordenadas tendrías que ponerle a u para llegar a R?**

Respuesta:  $u = (\dots, \dots)$  y el mayor número posible de saltos es .....

**Cuestión 5:**

(*Si necesitas ayuda* para responder a las preguntas de esta cuestión, puedes pinchar en la casilla de control **Ayuda para responder a las CUESTIONES**, que aparece a la derecha de la ventana gráfica del archivo **salto\_del\_caballo\_para\_JORNADAS\_del\_25\_5\_2013.html**, y aparecerá justo debajo una explicación que debes leer y tratar de comprender)

Tenemos los 5 puntos del plano (x,y):

$$(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5).$$

**5.1.** ¿Qué coordenadas enteras pondrías a  $u = (\text{DespHORIZderecha}, \text{DespVERTarriba})$  para que el caballo pase por esos 5 puntos? (**Ayuda:** usa los deslizadores **DespHORIZderecha**, **DespVERTarriba** y **numSALTOS** para encontrar tu respuesta).

Tu respuesta:  $u = (\dots, \dots)$ .

**5.2.** ¿Qué relación  $y = m \cdot x$  cumplen los 5 puntos? (**Ayuda:** una vez encontrada la respuesta a la pregunta 5.1., activa las casillas de control **Muestra la recta que une el ORIGEN de coordenadas y el punto D** y **Muestra la recta que une los puntos de salto del caballo** y **observa** las dos rectas)

Tu respuesta:

**5.3.** ¿Cuánto vale  $m$ ? Tu respuesta  $m = \dots\dots$

**5.4.** ¿Qué relación de igualdad tiene  $m$  con: las coordenadas de  $u$  (que has encontrado en la respuesta de la pregunta 5.1) y las coordenadas de los 5 puntos dados?

**Cuestión 6:** Sigue los pasos dados en la cuestión 5 para completar la tabla:

<p>Coordenadas de los PUNTOS por donde <i>debe pasar</i> el caballo</p>	<p>Coordenadas enteras de <math>u = (x, y)</math></p>	<p>Ecuación de la <i>recta VERDE</i> <math>y = m \cdot x</math></p>	<p>Valor de la pendiente <math>m</math></p>	<p><b>Relación de igualdad</b> entre <math>m</math>, las coordenadas de <math>u</math> y las coordenadas de los 5 puntos dados (<i>ESCRIBE las igualdades usando fracciones así:</i> <math>m = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math>)</p>
(4,1), (8,2), (12,3), (16,4), (20,5)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,3), (4,6), (6,9), (8,12), (10,15)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(3,3), (6,6), (9,9), (12,12), (15,15)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,6), (4,12), (6,18), (8,24), (10,30)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
(2,8), (3,12), (5,20), (6,24), (8,32)	$u = (\dots, \dots)$	$y = \dots \cdot x$	$m = \dots$	$\dots = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$