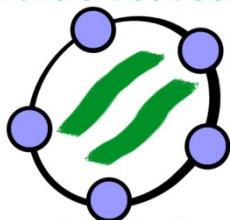


Jornadas de intercambios de experiencias:
Encuentros en Geogebra 4



Cálculo simbólico y gráfico con GeoGebra 4.2

Instituto GeoGebra

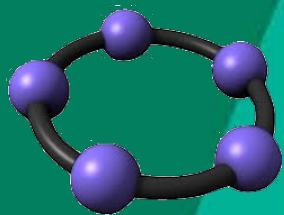


Andalucía

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Universidad de Córdoba

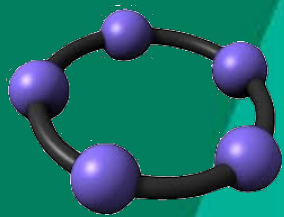
Instituto GeoGebra de Andalucía



Cálculo simbólico con GeoGebra

The screenshot displays the GeoGebra application window. At the top, there is a menu bar with options: Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana, and Ayuda. Below the menu is a toolbar containing various icons for geometric construction and algebraic operations. The main workspace is divided into two panes: 'Vista Algebraica' (Algebraic View) on the left and 'Vista Gráfica' (Graphics View) on the right. The Graphics View shows a Cartesian coordinate system with x and y axes ranging from -4 to 2. A context menu is open over the Graphics View, listing several options: 'Apariencias', 'Álgebra y Gráficos', 'Geometría Básica', 'Geometría', 'Hoja de Cálculo y Gráficos', and 'CAS y Gráficos'. The 'CAS y Gráficos' option is highlighted with a red oval. At the bottom of the window, there is an 'Entrada:' (Input) field.

Disponible a partir de la versión 4.2.

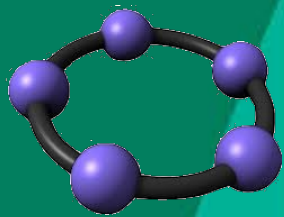


Cálculo simbólico con GeoGebra

The screenshot shows the GeoGebra application window. The menu bar includes 'Archivo', 'Edita', 'Vista', 'Opciones', 'Herramientas', 'Ventana', and 'Ayuda'. The 'Vista' menu is open, displaying the following options:

- Vista Algebraica (Ctrl+Mayús+A)
- Hoja de Cálculo (Ctrl+Mayús+S)
- CAS - Cálculo Simbólico (Ctrl+Mayús+K)** (highlighted)
- Vista Gráfica (Ctrl+Mayús+1)
- Vista Gráfica 2 (Ctrl+Mayús+2)
- Protocolo de Construcción (Ctrl+Mayús+L)
- Teclado
- Barra de Entrada
- Disposición ...
- Actualiza Vista Gráfica (Limpia rastros) (Ctrl+F)
- Recálculo de Todos los Objetos (Ctrl+R)

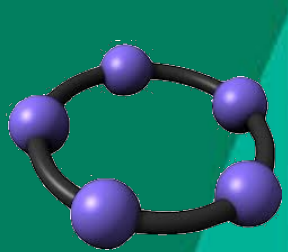
The main workspace shows a coordinate plane with x and y axes ranging from -4 to 6. A toolbar at the top right contains icons for undo, redo, a search box with 'a=2', and a pan tool. The bottom of the window features an 'Entrada:' text box and a refresh icon.



Cálculo simbólico con GeoGebra

The screenshot displays the GeoGebra application window with the following components:

- Menu Bar:** Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana, Ayuda.
- Toolbar:** Contains various geometric tools. The CAS tool (represented by a blue square with a white cross) is highlighted with a blue border.
- View Tabs:** Three tabs are visible: "Vista Algebraica" (closed), "CAS - Cálculo Simbólico" (active), and "Vista Gráfica" (closed).
- CAS View:** Shows a single input field containing the number "1". A blue arrow points upwards from the text "Vista CAS" below the input field.
- Graphical View:** A coordinate plane with x and y axes ranging from -3 to 3.
- Input Field:** Located at the bottom, labeled "Entrada:".



Cálculo simbólico con GeoGebra

Factorización de números y polinomios.

Resolución de ecuaciones.

Resolución de sistemas de ecuaciones.

Discusión de sistemas.

Cálculo diferencial.

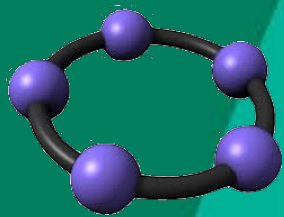
Cálculo integral.

Cálculo de límites.

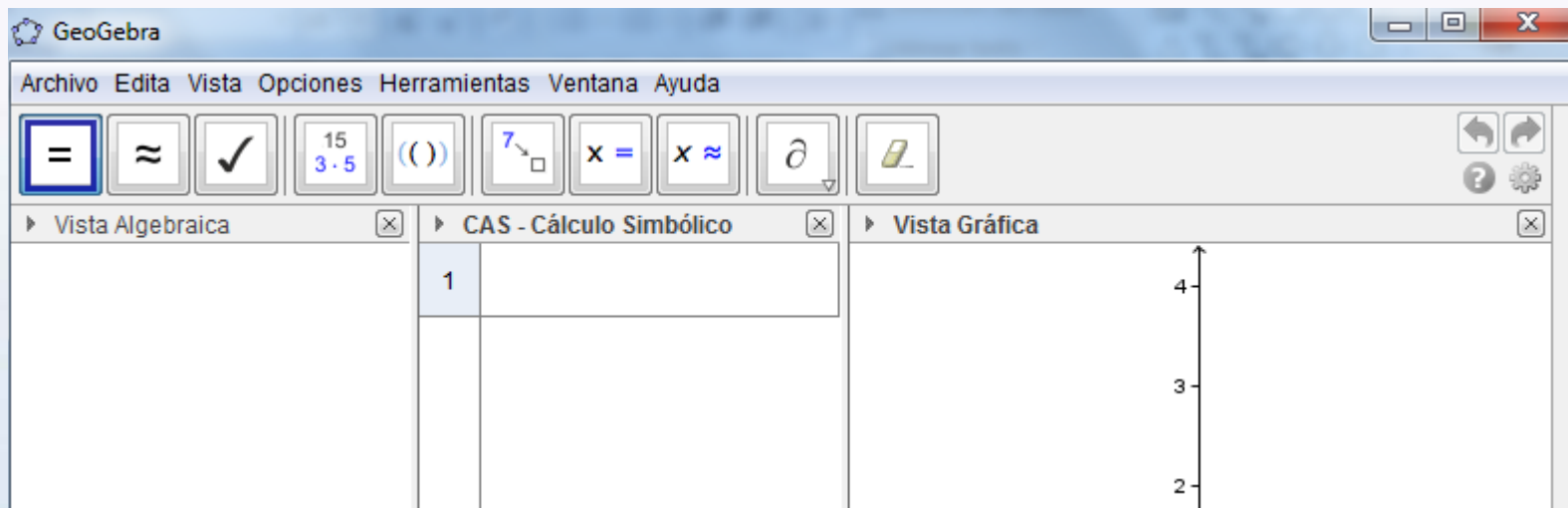
Sumas y productos de series.

Vectores y matrices.

Resolución de ecuaciones diferenciales.

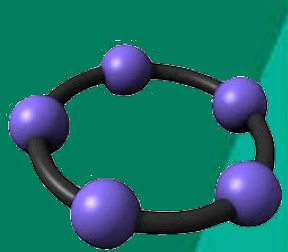


Vista CAS - Cálculo simbólico



Barra de herramientas propia.

Las operaciones y resultados aparecen numerados por filas.



Vista CAS - Cálculo simbólico

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$32 - 1/5$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{159}{5}$
2	$2x - 3x + 7x$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 6x$



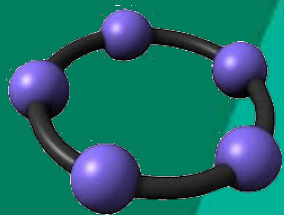
Evalúa
Enter



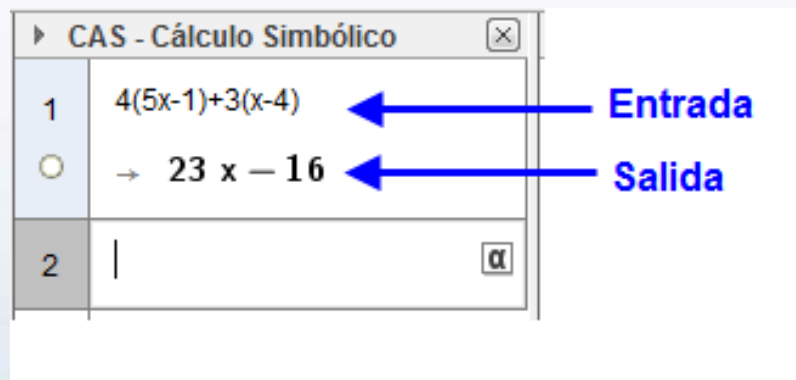
Valor numérico
Ctrl-Enter



Conserva entrada
Alt-Enter



Vista CAS - Cálculo simbólico

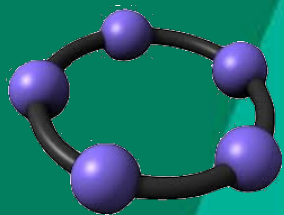


En una fila en blanco:

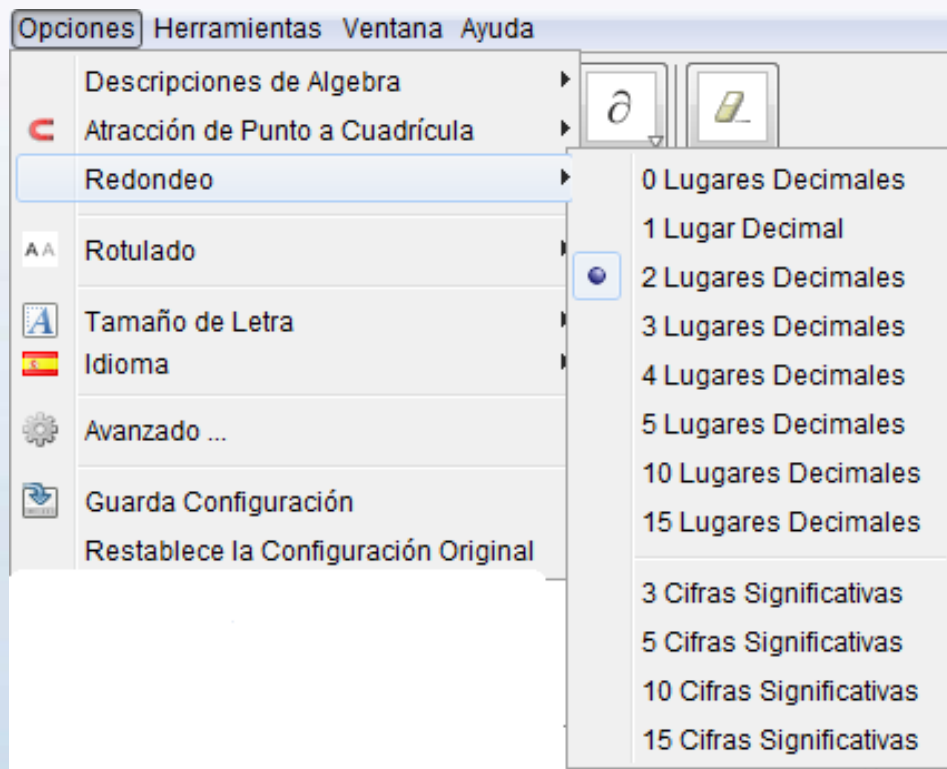
= Repite la entrada previa.

) Repite la entrada previa encerrada entre paréntesis.

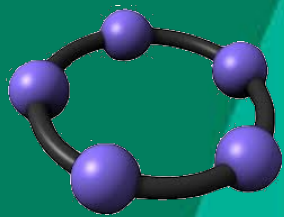
Barra espaciadora Repite la salida previa.



Vista CAS - Cálculo simbólico



Establece el número de cifras decimales para los valores numéricos o cálculos aproximados.



Vista CAS - Cálculo simbólico

GeoGebra

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Archivos de herramientas: Vista Algebraica, CAS - Cálculo Simbólico, Vista Gráfica

Vista Algebraica

Función

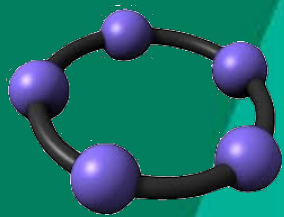
$f(x) = -9x^2 + 2x + 3$

CAS - Cálculo Simbólico

1	$f(x) := 2x[1 - 3x] - 3(x^2 - 1)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := -9x^2 + 2x + 3$
2	

Vista Gráfica

Entrada:



Referencias entre filas

Estáticas:

- # salida previa
- #n salida fila n
- ## entrada previa
- ##n entrada fila n

Dinámicas:

- \$ salida previa
- \$n salida fila n
- \$\$ entrada previa
- \$\$n entrada fila n

Estática # →

Dinámica \$ →

1	$2x+3x$
○	→ $5x$
2	$5x$
○	→ $5x$
3	$\$1$
○	→ $5x$
4	α

1	$2x\ 3x$
○	→ $6x^2$
2	$5x$
○	→ $5x$
3	$\$1$
○	→ $6x^2$



Operadores matemáticos

+

-

*

/

^

espacio

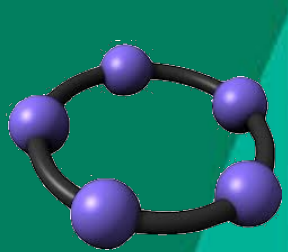
Alt - n

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ
λ	μ	ν	ξ	ο	ρ	σ	τ	υ	φ
ϕ	χ	ψ	ω	Γ	Δ	Θ	∞	⊗	≅
≠	≤	≥	¬	∧	∨	→		⊥	∈
⊆	⊂	⊄	²	³	°	í	π	e	
«	»	€							
	1								α

Alt - i unidad imaginaria

Alt - p pi Número Pi

Alt - e Número e

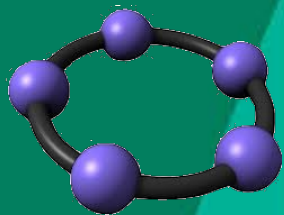


Copiar y pegar expresiones

3	$(159 / 5) + (6x)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{30x + 159}{5}$
4	
<input type="radio"/>	

- Copia
- Copia como LaTeX
- Copia como Fórmula LibreOffice
- Copia como Imagen

5	<input type="button" value="Pega"/>
---	-------------------------------------



Primeras operaciones: factorizar



Factoriza(número)

Factoriza(expresión)

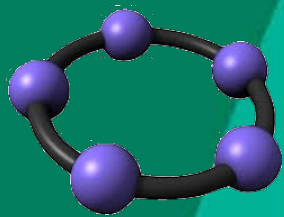
13	20!
<input type="radio"/>	→ 2432902008176640000
14	Factoriza[2432902008176640000]
<input type="radio"/>	→ $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

11	$1+2x+x^2$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(x + 1)^2$
12	Factoriza[($1+2x+x^2$)]
<input type="radio"/>	→ $(x + 1)^2$

CAS - Cálculo Simbólico

1	$a^{(8/3)}-b^{(4/5)}$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[5]{b^2}) (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{b}) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[5]{b})$
2	<input type="text"/>

Factoriza(expresión, variable)



Máximo común múltiplo y mínimo común divisor

Divisores

MCD Máximo común divisor

MCM Mínimo común múltiplo

División {cociente, resto}

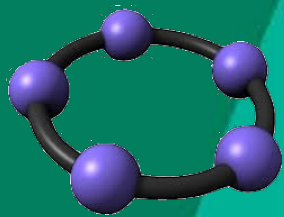
Divisores

ListaDivisores

21	MCM[24,40] ○ → 120
22	MCD[24,40] ○ → 8
23	MCM[$x^2-7x+10, x^2-3x-10$] ○ → $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
24	MCD[$x^2-7x+10, x^2-3x-10$] ○ → $x - 5$

1	División[$x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2, x^2+3$] ○ → $\{x^2 + x + 1, 3x - 1\}$
2	División[30,4] ○ → $\{7, 2\}$

1	Divisores[36] ○ → 9
2	ListaDivisores[36] ○ → $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$



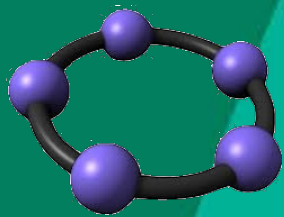
Actividad

Con ayuda de un deslizador, determina la lista de divisores de los números menores que 100 para establecer cuáles son primos y cuales no.

The screenshot shows the GeoGebra interface with the following components:

- Menu Bar:** Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana, Ayuda
- Toolbar:** Contains various geometric construction tools like point, line, circle, and sliders.
- Algebra View (Vista Algebraica):** Shows a variable $n = 1$ under the 'Número' category.
- CAS - Cálculo Simbólico:** A table with the following content:

1	ListaDivisores[n]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{1\}$
2	
- Graphic View (Vista Gráfica):** Shows a slider for $n = 1$ with a black dot at the start of a horizontal line.

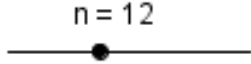


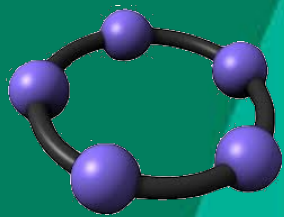
Números primos

EsPrimo

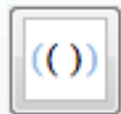
PrimoPrevio

PrimoSiguiente

CAS - Cálculo Simbólico		Vista Gráfica
1	ListaDivisores[n] → {1, 2, 3, 4, 6, 12}	
2	EsPrimo[n] → false	
3	PrimoPrevio[n] → 11	
4	PrimoSiguiente[n] → 13	



Primeras operaciones: desarrollo y sustitución



Desarrolla

CAS - Cálculo Simbólico

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow -x^2 - 8x + 14$
2	

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$	<input type="checkbox"/>
<input type="radio"/>	$\rightarrow 3(x^2 - 4x + 2) - (4x^2 - 4x - 8)$	



Sustituye

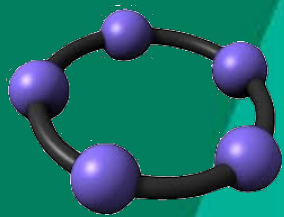
Sustituye - Fila 1

Expresión Pre...	Nueva expresi...
x	

= ≈ ✓

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow -x^2 - 8x + 14$
2	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	Sustituye, x=2: -6

Sustituye[expresión, variable, valor]



Actividad

Aplica el teorema del resto para determinar las raíces enteras del polinomio:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

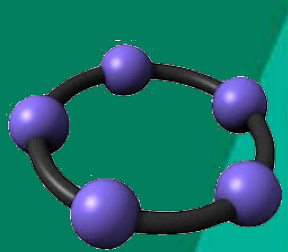
Comprueba los resultados hallando la descomposición en factores del polinomio.

Asignación a una variable:

:=

$$a := 3x - 1$$

15	$P(x) := x^3 + 2x^2 + x + 2$ <input checked="" type="radio"/> $\rightarrow P(x) := x^3 + 2x^2 + x + 2$
16	Sustituye[P(x),x,1] <input type="radio"/> $\rightarrow 6$
17	Sustituye[P(x),x,-1] <input type="radio"/> $\rightarrow 2$
18	Sustituye[P(x),x,2] <input type="radio"/> $\rightarrow 20$
19	Sustituye[P(x),x,-2] <input type="radio"/> $\rightarrow 0$



Actividades

1. *Determinar si $1+i$, es una raíz del polinomio:*

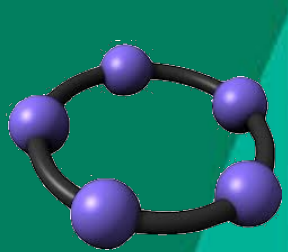
$$3z^4 - 5z^3 + 4z - 2$$

2. *Comprobar que a es una raíz del polinomio $p(x)$.*

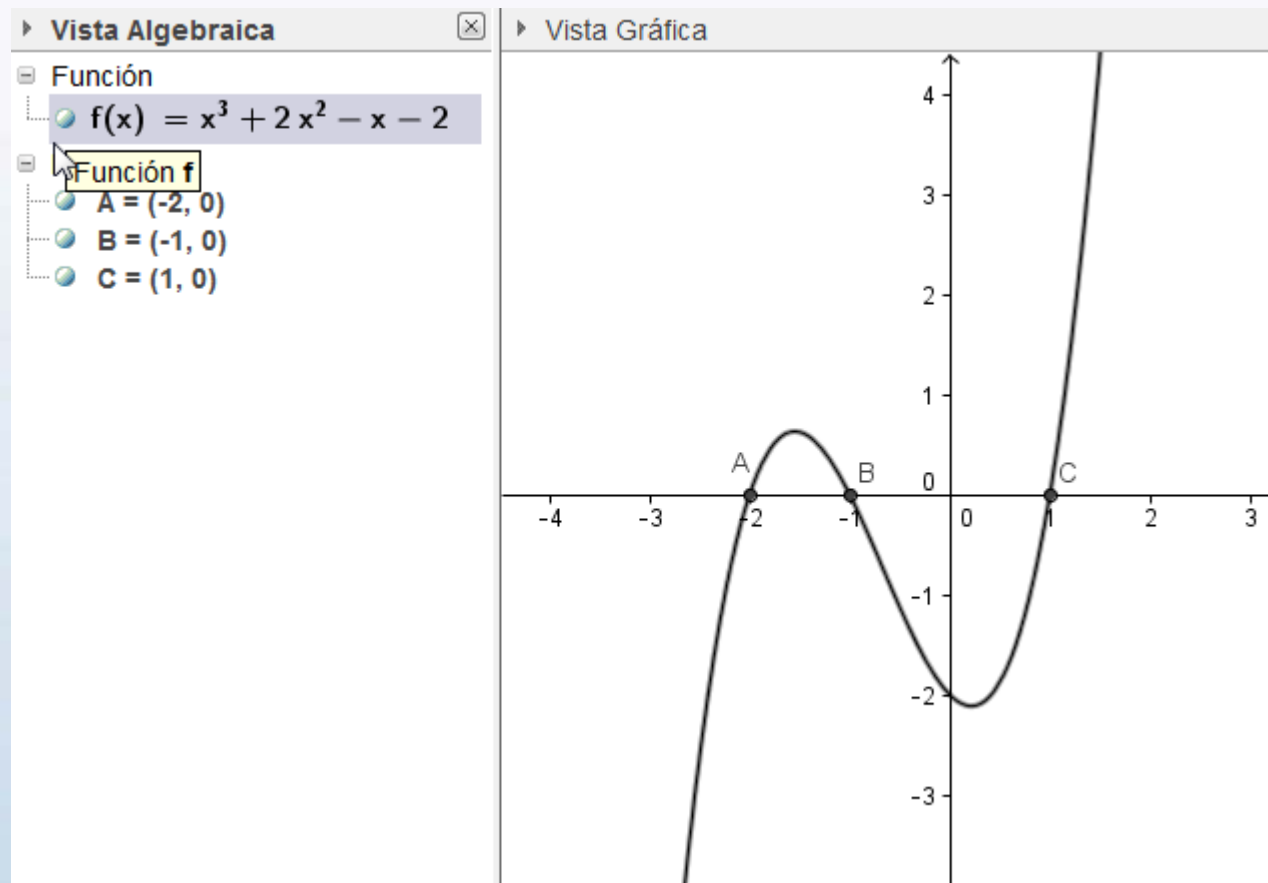
$$a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \qquad p(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576$$

3. *Si a y b son dos números naturales consecutivos, entonces la siguiente expresión es un cuadrado perfecto.*

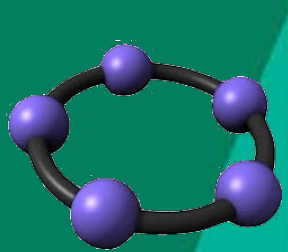
$$a^2 + b^2 + (ab)^2$$



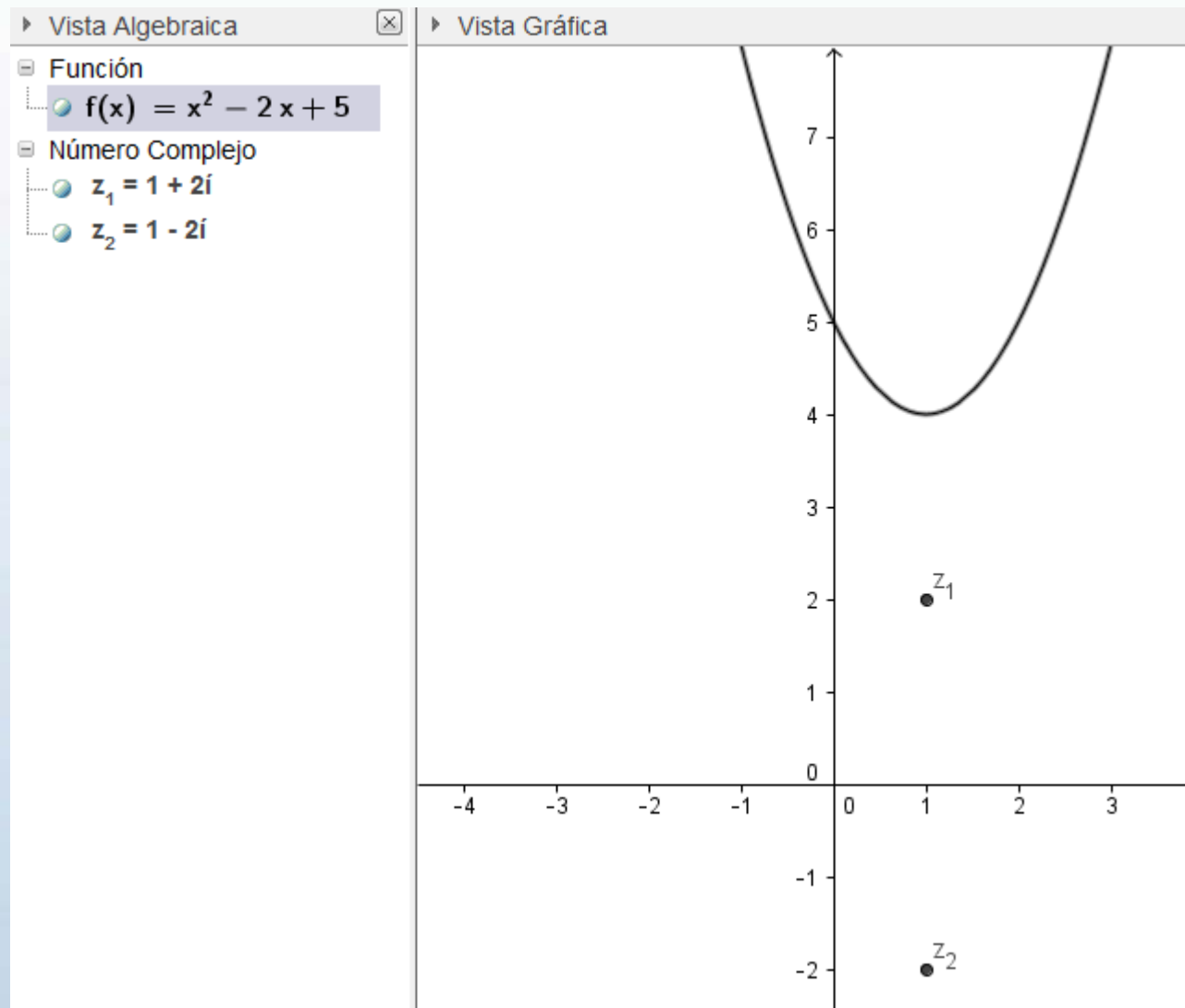
Resolución de ecuaciones



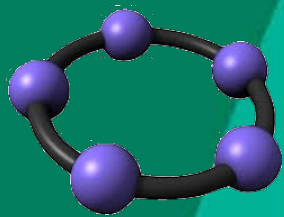
Raíz[polinomio]



Resolución de ecuaciones



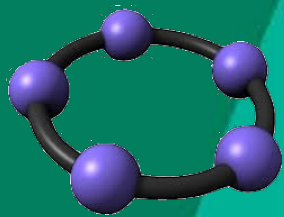
RaízCompleja[polinomio]



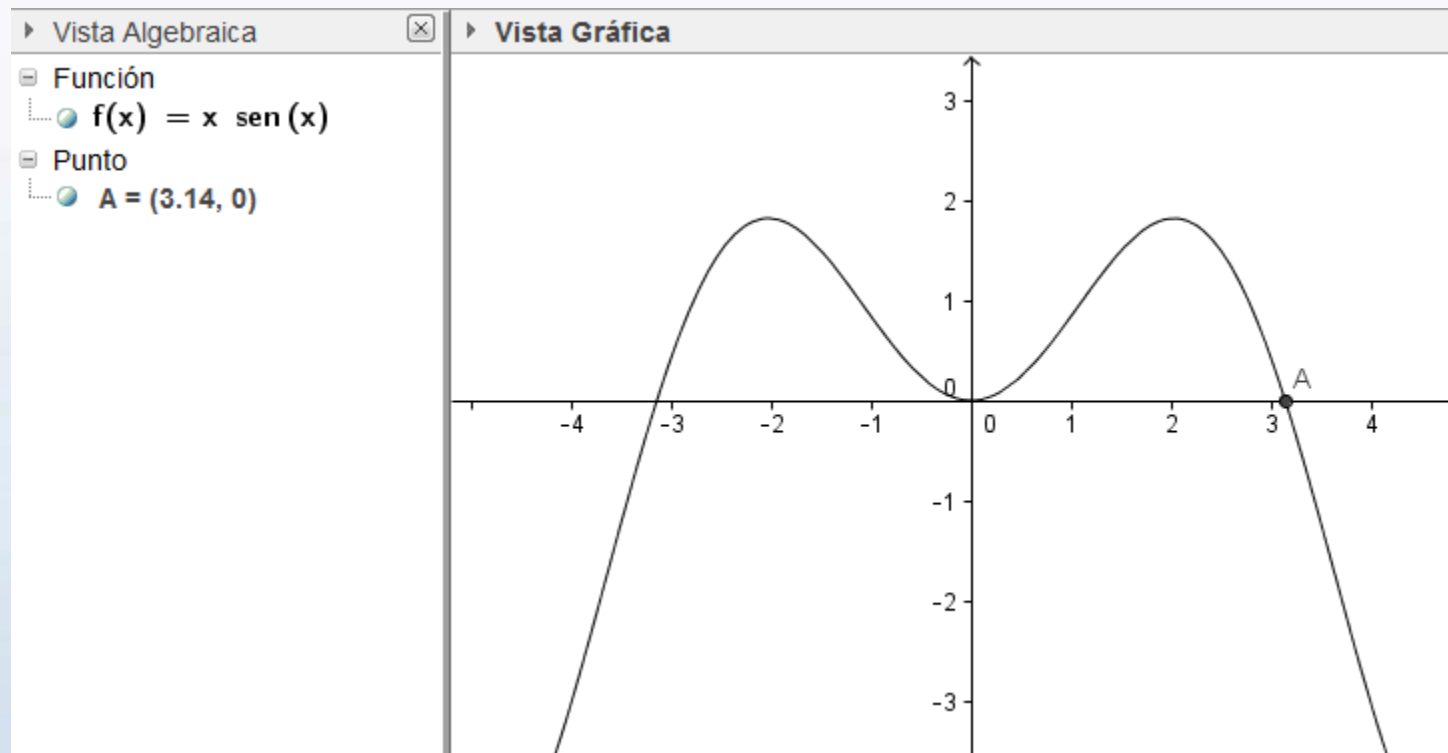
Resolución de ecuaciones

Vista Algebraica	CAS - Cálculo Simbólico	Vista Gráfica
<p>Función</p> <p>$f(x) = x^2 + x - 4$</p> <p>Punto</p> <p>A = (-2.56, 0)</p> <p>B = (1.56, 0)</p>	<p>Soluciones[f(x)]</p> <p>1</p> <p>$\rightarrow \left\{ \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \frac{-\sqrt{17} - 1}{2} \right\}$</p> <p>2</p>	

Soluciones[ecuación]

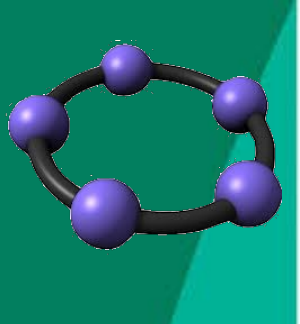


Resolución de ecuaciones

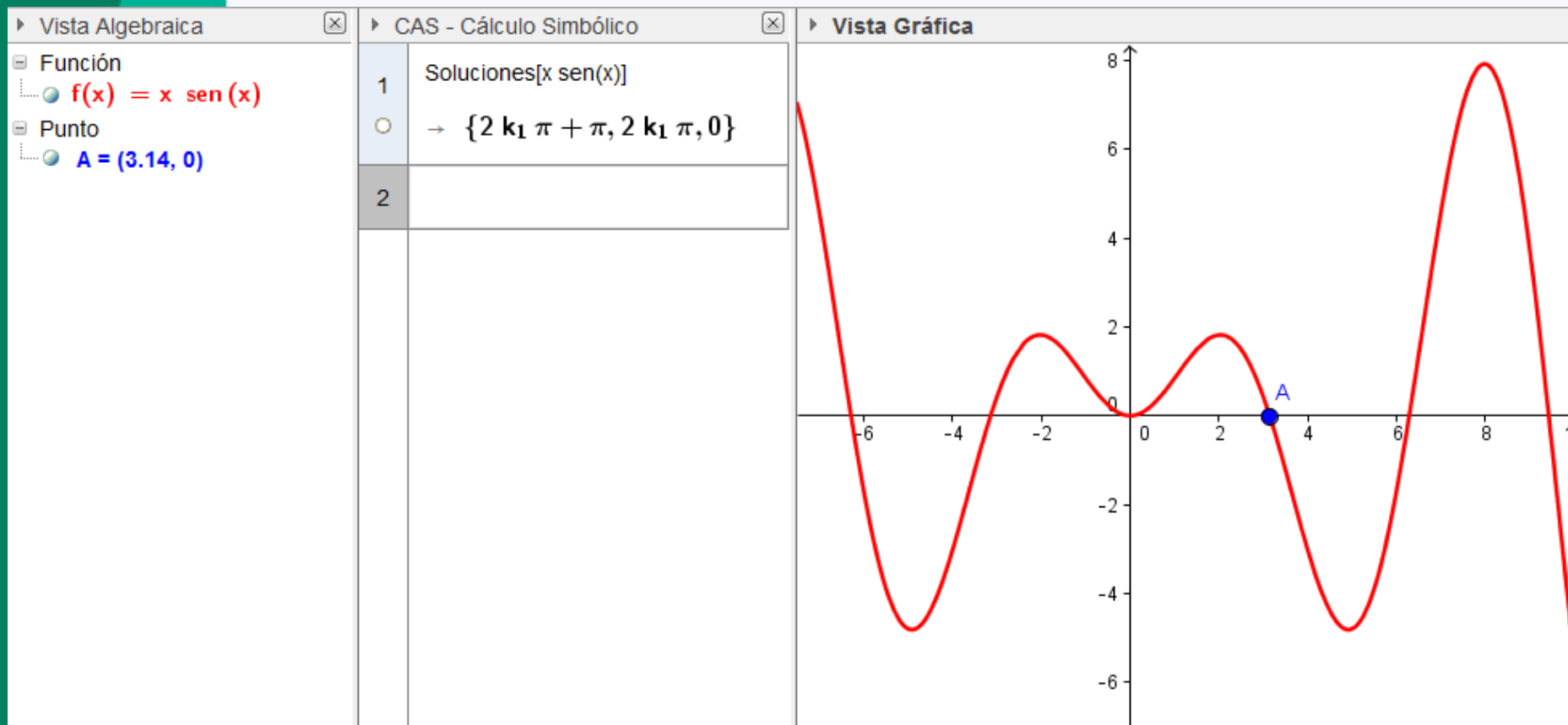


Raíz[ecuación, valor inicial, valor final]

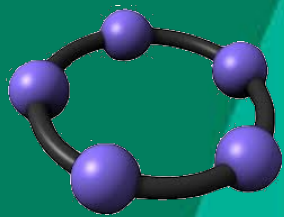
Raíces[ecuación, valor inicial, valor final]



Resolución de ecuaciones



Soluciones[ecuación]



Resolución de ecuaciones



Resuelve

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$x^4 - 5x^2 + 4$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 2, x = 1, x = -1, x = -2\}$
2	

Soluciones[ecuación]

Raíz[ecuación]

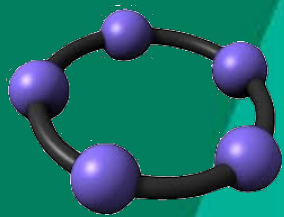
Resuelve[ecuación]

CAS - Cálculo Simbólico	
1	Soluciones[$x^2 - 4x + 3$]
<input type="radio"/>	→ $\{3, 1\}$
2	<input type="button" value="α"/>

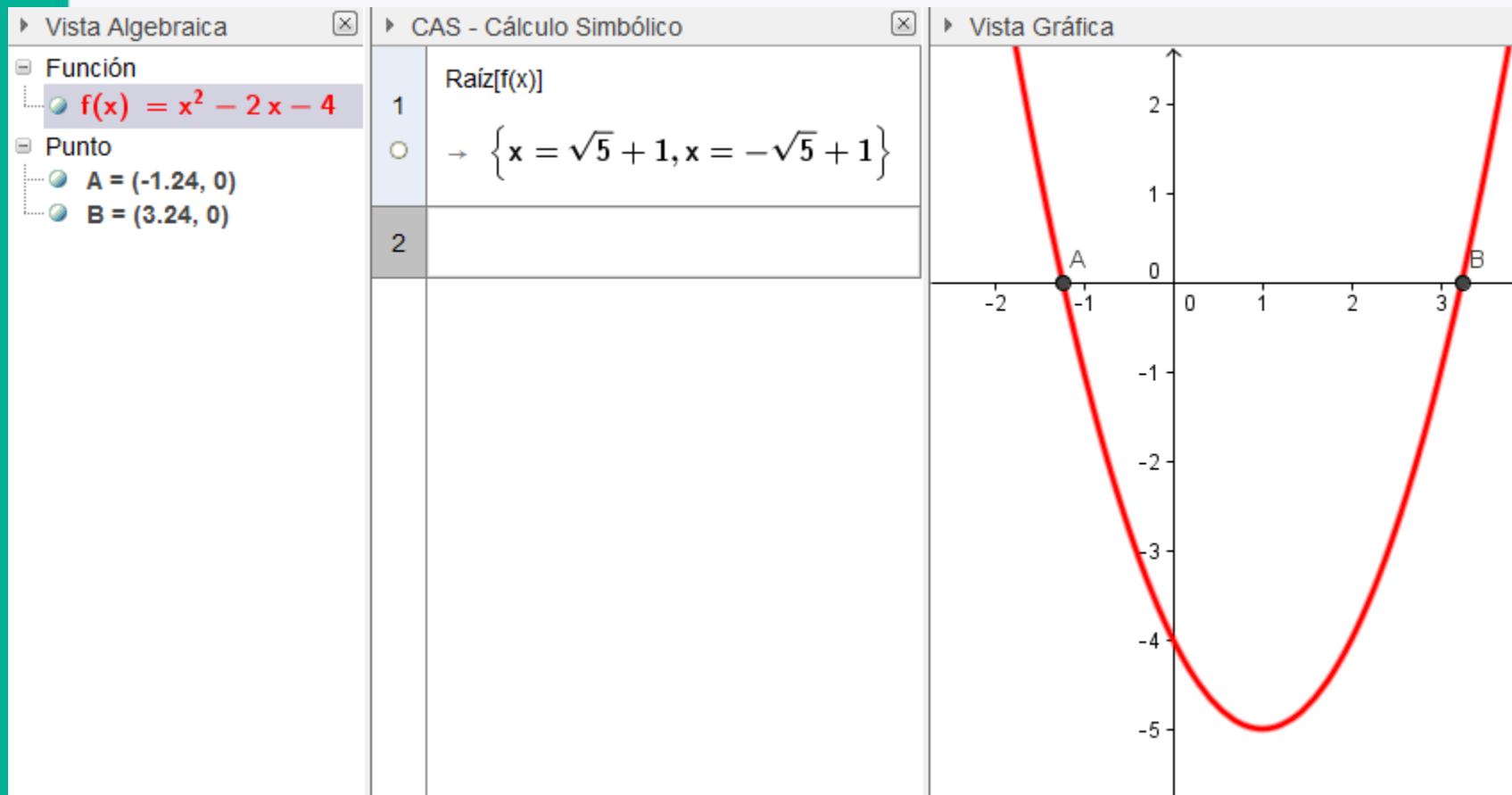
2	Soluciones[$a x^2 + b x + c = 0, a$]
<input type="radio"/>	→ $\left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$
3	Soluciones[$a x^2 + b x + c = 0, x$]
<input type="radio"/>	→ $\left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$

Soluciones[ecuación, variable]

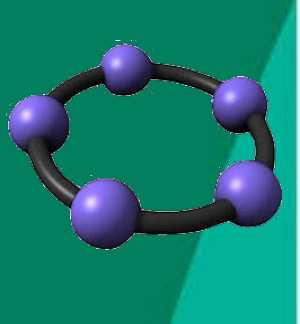
Resuelve[ecuación, variable]



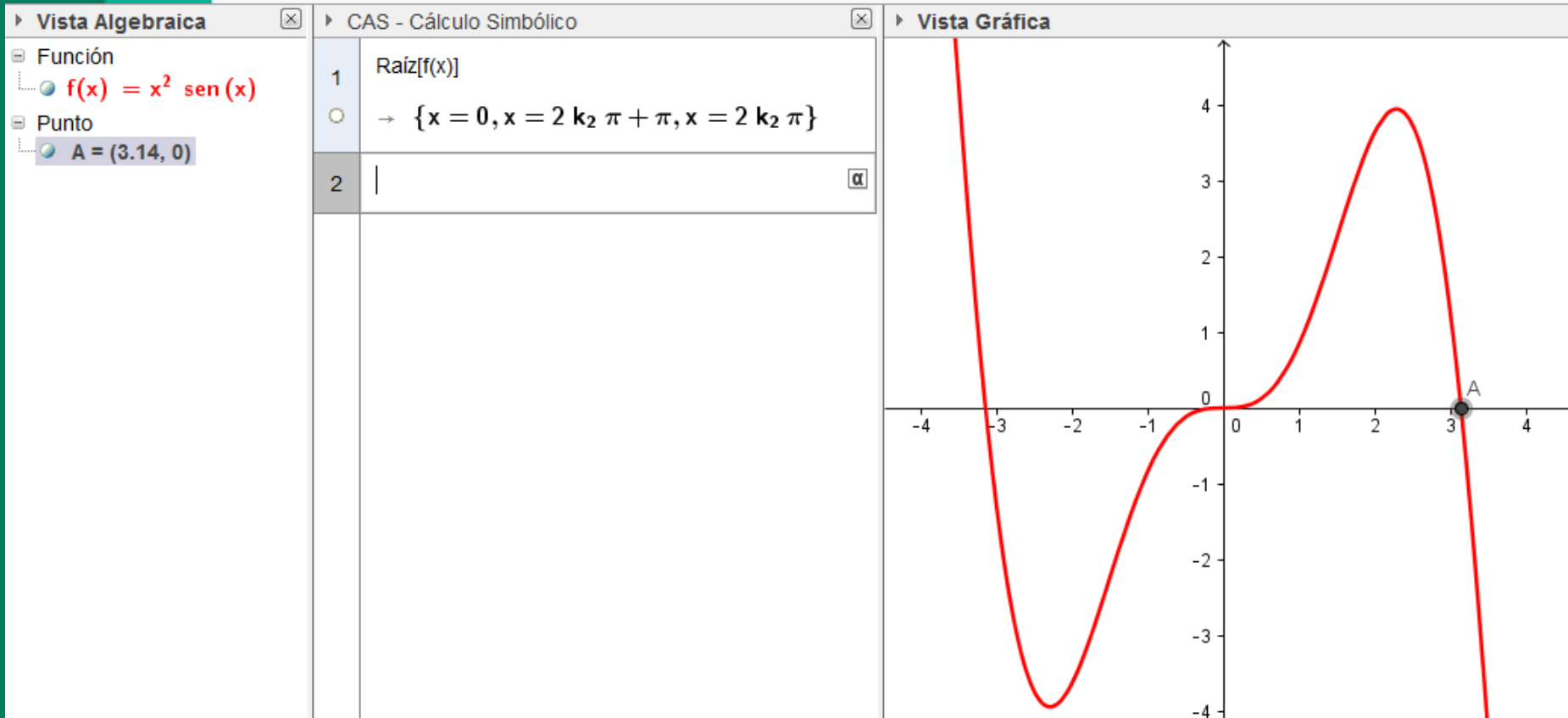
Resolución de ecuaciones



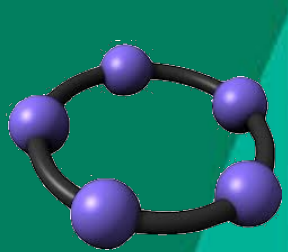
Raíz[polinomio]



Resolución de ecuaciones



Raíz[función]



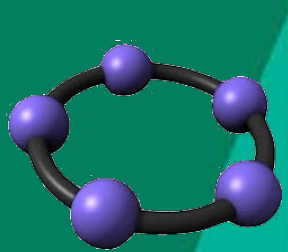
Actividad

Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

$$x^3 + x^2 - 7x - 7 = 0$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

9	Soluciones[x^3+x^2-7x-7]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}, -1\}$
10	Soluciones[x^4+3x^2-4]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{1, -1\}$



Factorización de polinomios

Factores

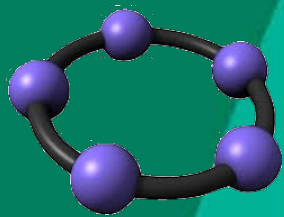
11
○ $\rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 4 & 1 \\ x + 1 & 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Factoriza

12
○ $\rightarrow (x^2 + 4) (x + 1) (x - 1)$

FactorC

13
○ $\rightarrow (x + 2i) (x - 2i) (x + 1) (x - 1)$



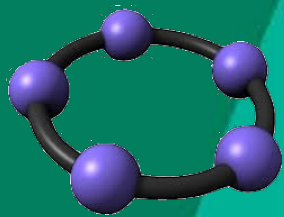
Raíces complejas

SolucionesC

14	Soluciones $[x^4+3x^2-4]$
○	→ $\{1, -1\}$
15	SolucionesC $[x^4+3x^2-4]$
○	→ $\{2i, -2i, 1, -1\}$

ResoluciónC

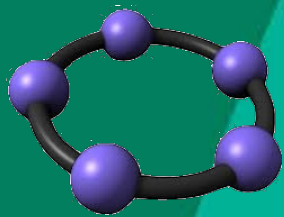
1	ResoluciónC $[x^3+2x^2+5x+10]$
○	→ $\{x = i\sqrt{5}, x = -i\sqrt{5}, x = -2\}$



Resolución de ecuaciones

Vista Algebraica	CAS - Cálculo Simbólico	Vista Gráfica						
<p>Función</p> <p>$f(x) = x^2 + x + 2$</p> <p>Número Complejo</p> <p>$z_1 = -0.5 + 1.32i$</p> <p>$z_2 = -0.5 - 1.32i$</p>	<p>RaízCompleja[f(x)]</p> <table><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>○</td><td>$\rightarrow \left\{ \frac{i\sqrt{7} - 1}{2}, \frac{-i\sqrt{7} - 1}{2} \right\}$</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1		○	$\rightarrow \left\{ \frac{i\sqrt{7} - 1}{2}, \frac{-i\sqrt{7} - 1}{2} \right\}$	2		
1								
○	$\rightarrow \left\{ \frac{i\sqrt{7} - 1}{2}, \frac{-i\sqrt{7} - 1}{2} \right\}$							
2								

RaízCompleja[polinomio]



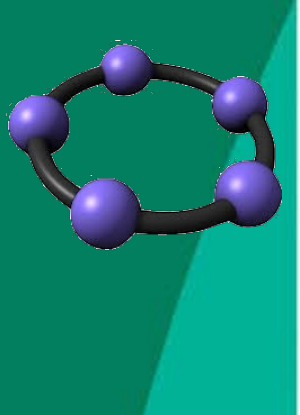
Resolución numérica de ecuaciones

Resolver la ecuación polinómica $x^6 + x - 2 = 0$

CAS - Cálculo Simbólico	
1	Soluciones[x ⁶ +x-2]
<input type="radio"/>	→ {1}
2	SolucionesC[x ⁶ +x-2]
<input type="radio"/>	→ {?, 1}

3	Factoriza[x ⁶ + x - 2]
<input type="radio"/>	→ (x ⁵ + x ⁴ + x ³ + x ² + x + 2) (x - 1)

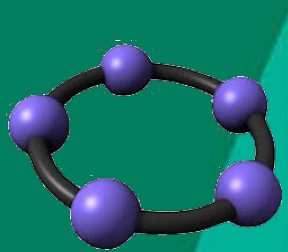
4	f(x):=x ⁵ + x ⁴ + x ³ + x ² + x + 2
<input checked="" type="radio"/>	→ f(x) := x ⁵ + x ⁴ + x ³ + x ² + x + 2



Resolución numérica de ecuaciones

Resolver la ecuación polinómica $x^6 + x - 2 = 0$

Vista Algebraica	CAS - Cálculo Simbólico	Vista Gráfica														
<p>Función</p> <p>$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$</p>	<table border="1"><tr><td>1</td><td>Soluciones[x^6+x-2]</td></tr><tr><td><input type="radio"/></td><td>$\rightarrow \{?, 1\}$</td></tr><tr><td>2</td><td>Factoriza[x^6+x-2]</td></tr><tr><td><input type="radio"/></td><td>$\rightarrow (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) (x - 1)$</td></tr><tr><td>3</td><td>$f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$</td></tr><tr><td><input checked="" type="radio"/></td><td>$\rightarrow f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$</td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table>	1	Soluciones[x^6+x-2]	<input type="radio"/>	$\rightarrow \{?, 1\}$	2	Factoriza[x^6+x-2]	<input type="radio"/>	$\rightarrow (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) (x - 1)$	3	$f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$	<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$	4		
1	Soluciones[x^6+x-2]															
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{?, 1\}$															
2	Factoriza[x^6+x-2]															
<input type="radio"/>	$\rightarrow (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) (x - 1)$															
3	$f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$															
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$															
4																



Resolución numérica de ecuaciones

SolucionesN

4

SolucionesN[x⁶+x-2=0]

○

→ {-1.21, 1}

ResoluciónN

5

ResoluciónN[x⁶+x-2=0]

○

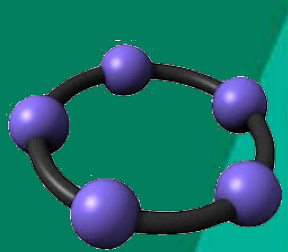
→ {x = -1.21, x = 1}

SolucionesN[ecuación, variable]

SolucionesN[ecuación, variable=valor inicial]

ResoluciónN[ecuación, variable]

ResoluciónN[ecuación, variable=valor inicial]



Resolución de sistemas de ecuaciones

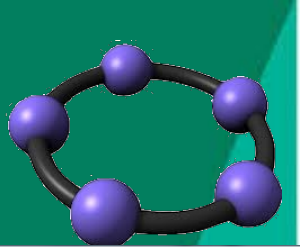
Los mismos comandos utilizados en la resolución de ecuaciones.

`Soluciones[{ecuación1,ecuación2,...},{x, y, z, ...}]`

`Resuelve[{ecuación1,ecuación2,...},{x, y, z, ...}]`

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = -3 \\ 4x - y - 5z = 4 \end{array} \right\}$$

1	<code>Soluciones[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]</code>
○	<code>→ (2 -1 1)</code>



La versión 5 de GeoGebra facilita la representación en 3D.

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica CAS - Cálculo Simbólico Vista Gráfica 3D

Line3D

- d: $X = (1.16, -1.51, -0.18) + \lambda (0.28, 0.17, 0.4)$
- e: $X = (0.4, -1.28, -0.22) + \lambda (0.7, 0.12, 0.54)$
- f: $X = (0.26, -0.6, -0.47) + \lambda (0.43, -0.1, 0.36)$

Plane3D

- a: $3x + 2y - 3z = 1$
- b: $x + 3y - 2z = -3$
- c: $4x - y - 5z = 4$

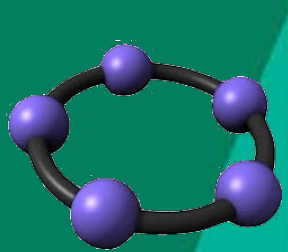
Point3D

- A: $(2, -1, 1)$

1 Resuelve[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,
y,z}]

Resuelve: $(x = 2 \quad y = -1 \quad z = 1)$

2 |

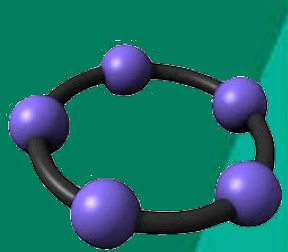


Actividad

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = -3 \\ x - 3y + z = 4 \end{array} \right\}$$

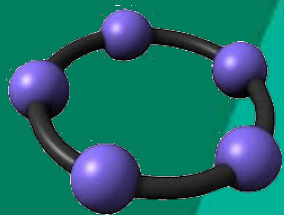
$$\left. \begin{array}{l} x - y + z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 3t = -2 \end{array} \right\}$$



Actividad

Discutir y resolver, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

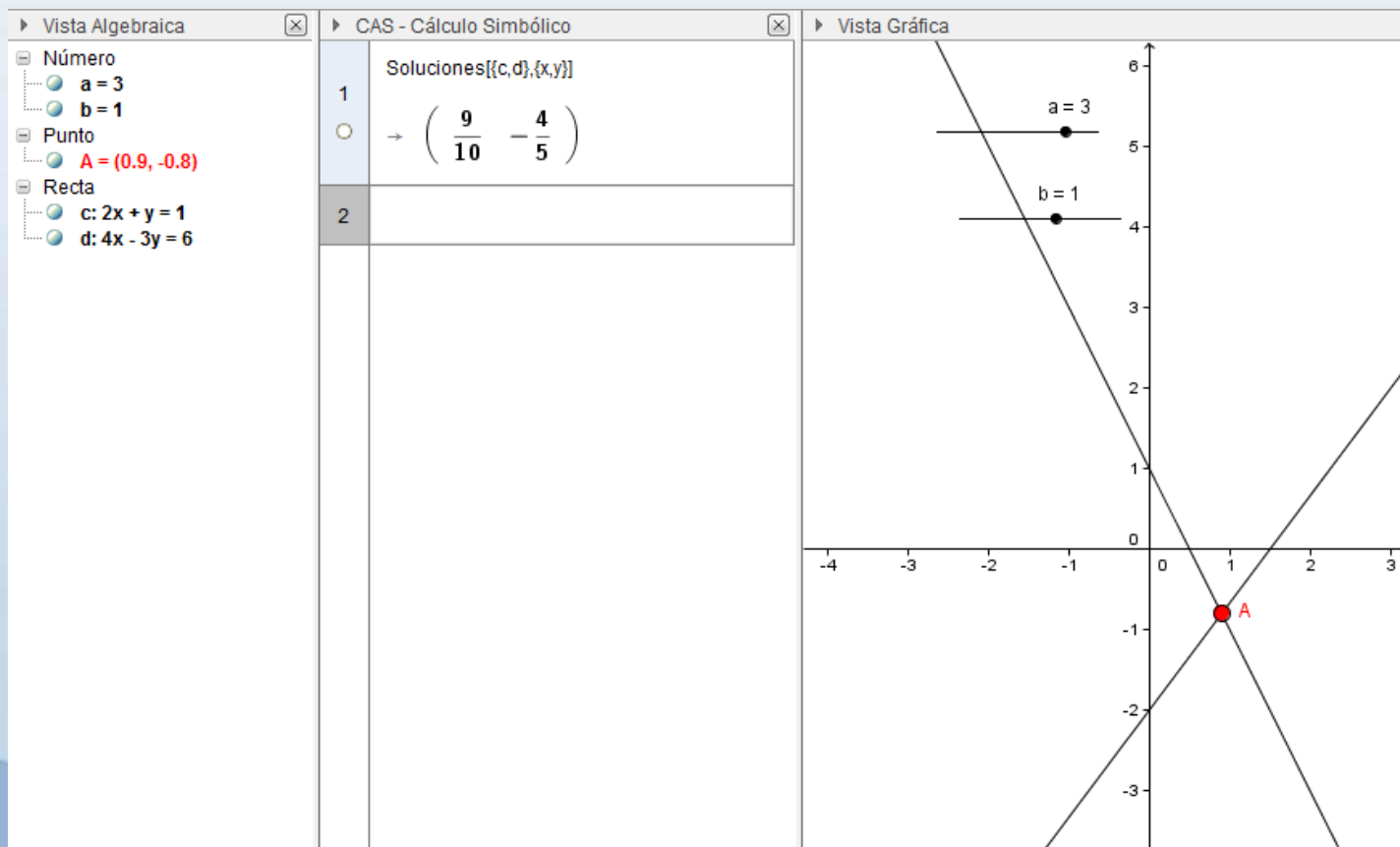
$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array} \right\}$$

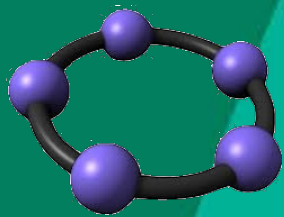


Actividad

Discutir y resolver, según los valores de los parámetros a y b , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

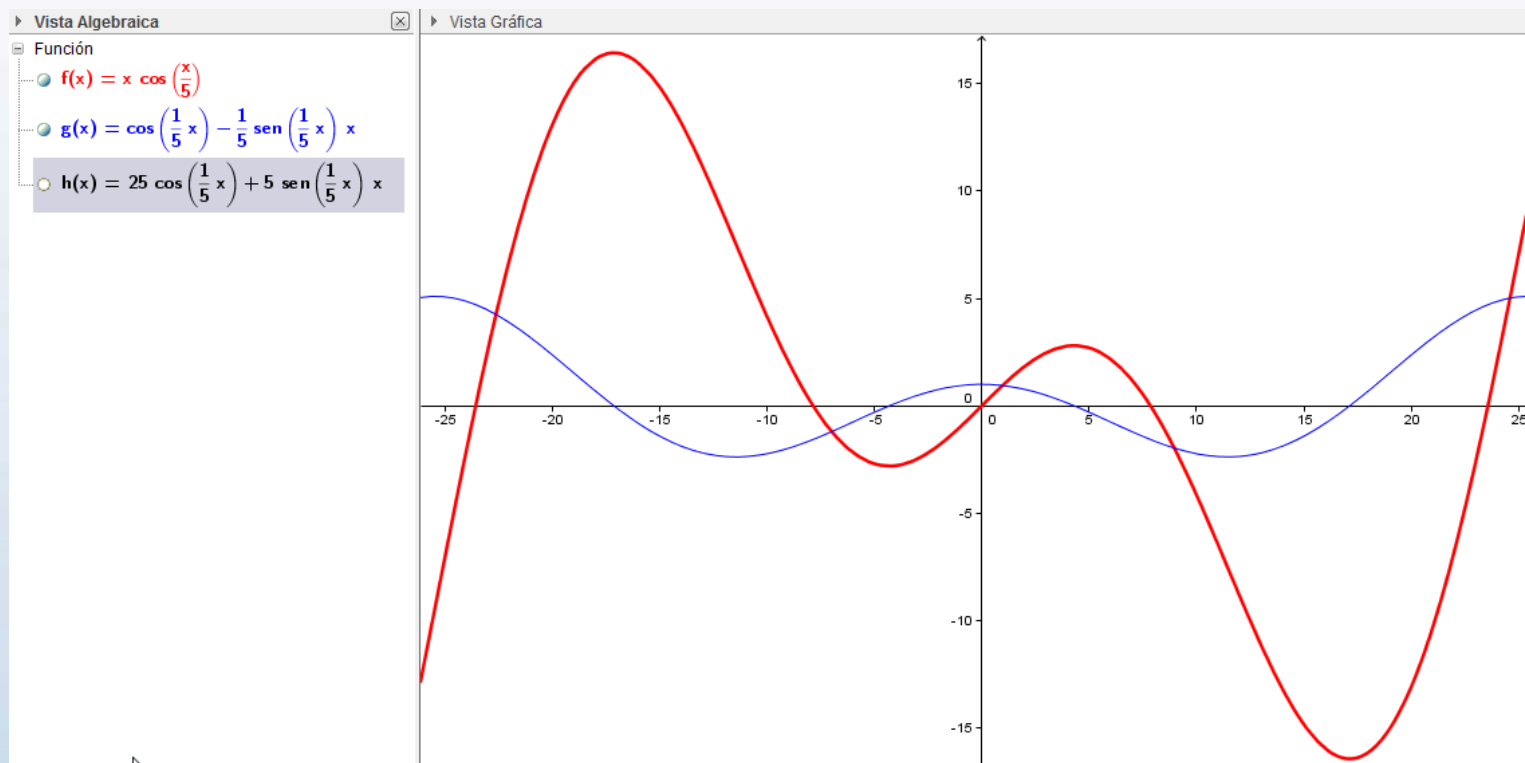
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = b \\ 4x - ay = 6 \end{array} \right\}$$





Aplicaciones al análisis y al cálculo. Derivadas

Desde la vista algebraica

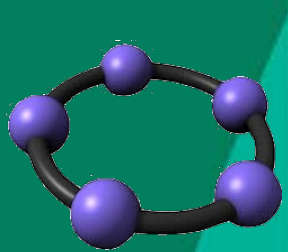


Derivada[expresión]

Derivada[expresión,variable]

Derivada[expresión,orden]

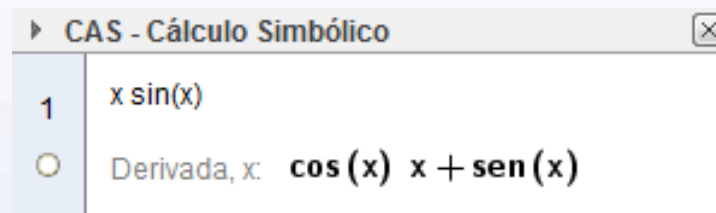
Derivada[expresión,variable,orden]



Aplicaciones al análisis y al cálculo. Derivadas



Derivada



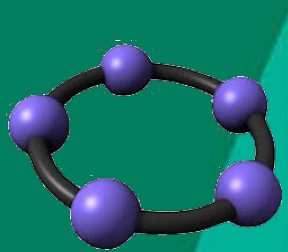
Derivada[expresión]

Derivada[expresión,variable]

Derivada[expresión,variable,orden]

DerivadaImplícita[f(x,y)]

DerivadaImplícita[f(x,y), v dependiente, v independiente]



Integración



Integral

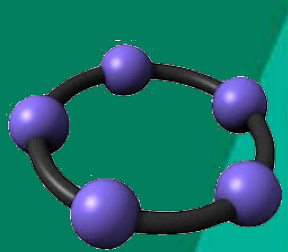
7	$x^3 - 2x$
<input type="radio"/>	Integral, x: $\frac{1}{4}x^4 - x^2 + c_1$

Integral[expresión]

Integral[expresión,variable]

Integral[expresión, valor inicial, valor final]

Integral[expresión,variable,valor inicial, valor final]

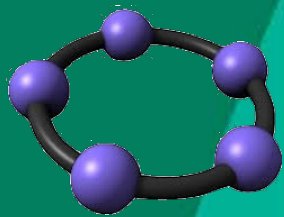


Actividad

Calcular.

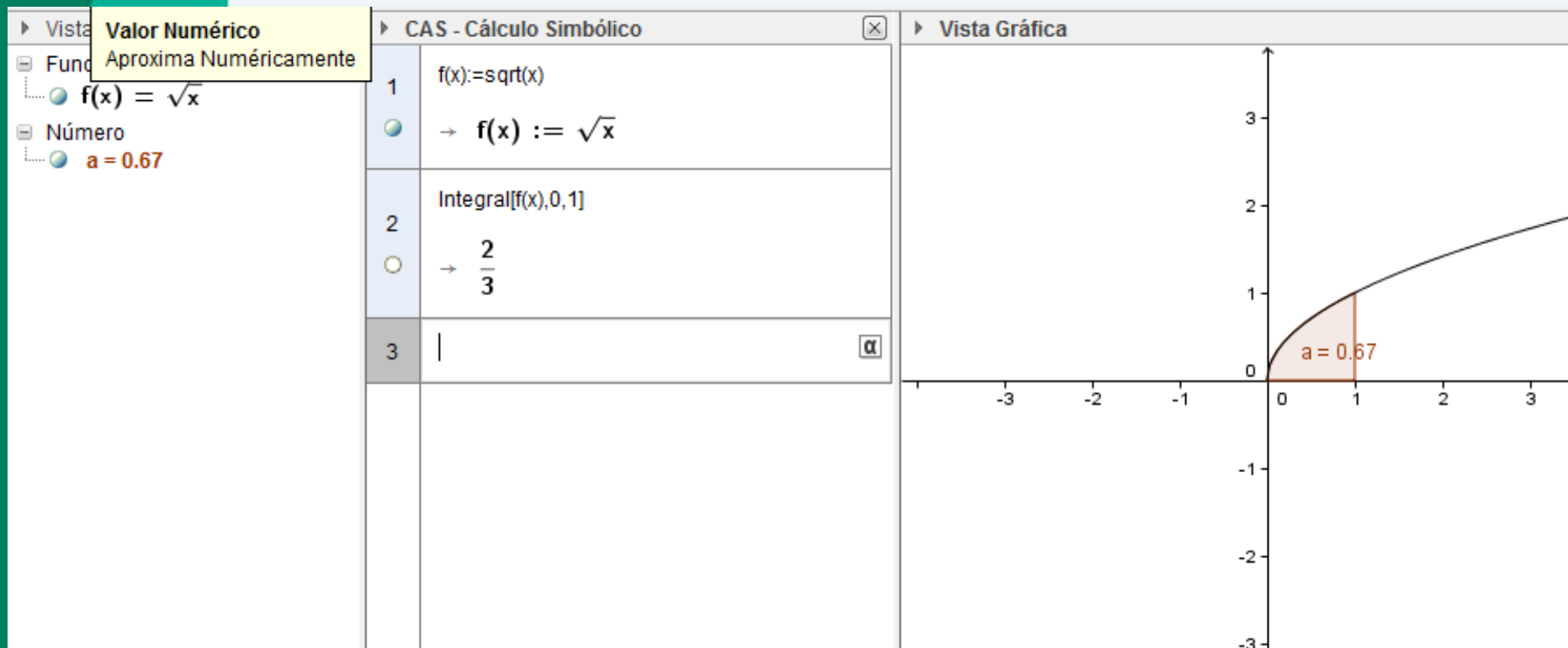
$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

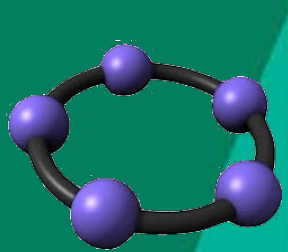
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x \, dx$$



Actividad

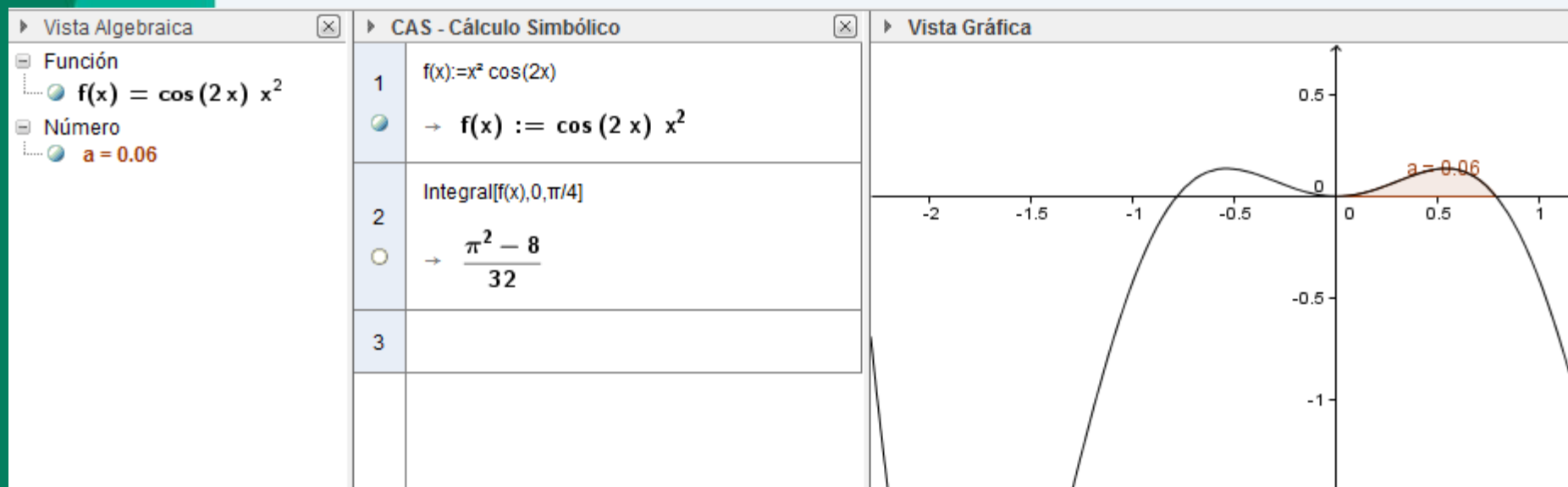
Calcular. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

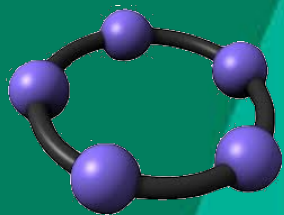




Actividad

Calcular: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x \, dx$

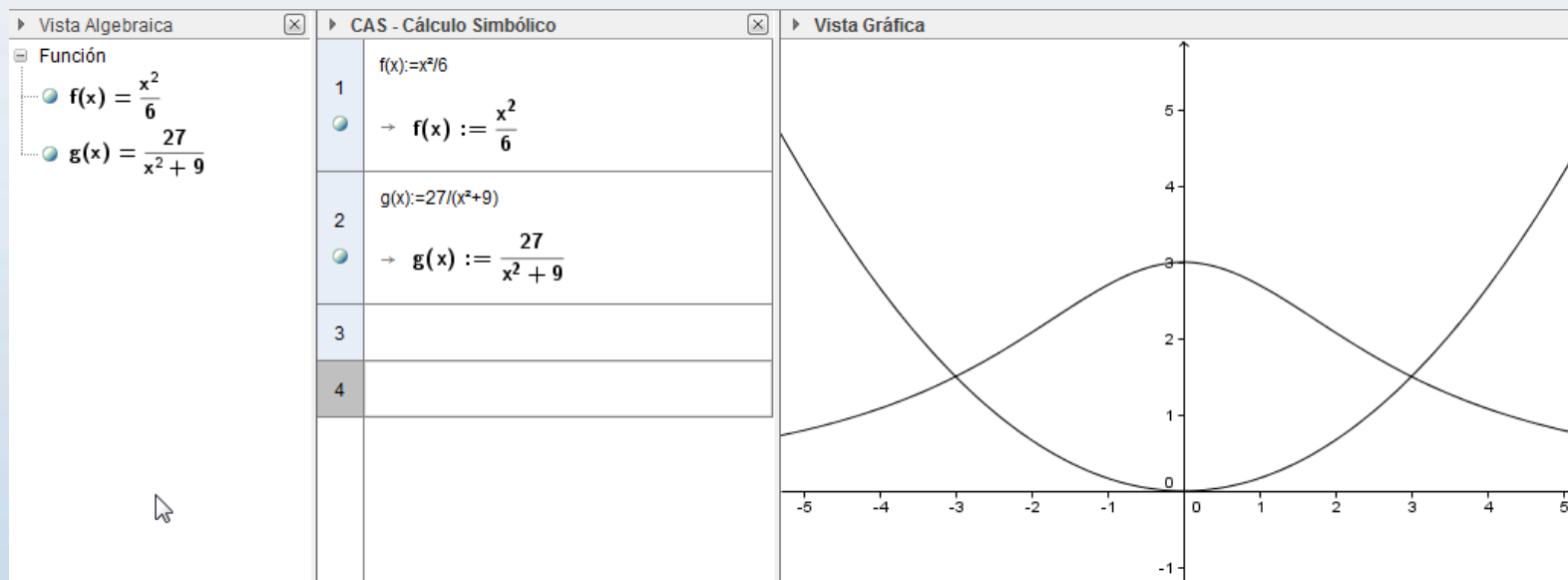




Actividad

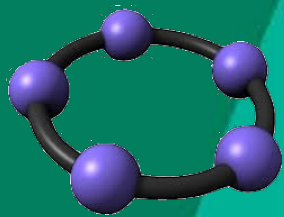
Hallar el área encerrada entre las dos curvas siguientes:

$$y = \frac{x^2}{6} \qquad y = \frac{27}{x^2 + 9}$$



3	Resuelve($f(x)=g(x)$)
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = 3, x = -3\}$

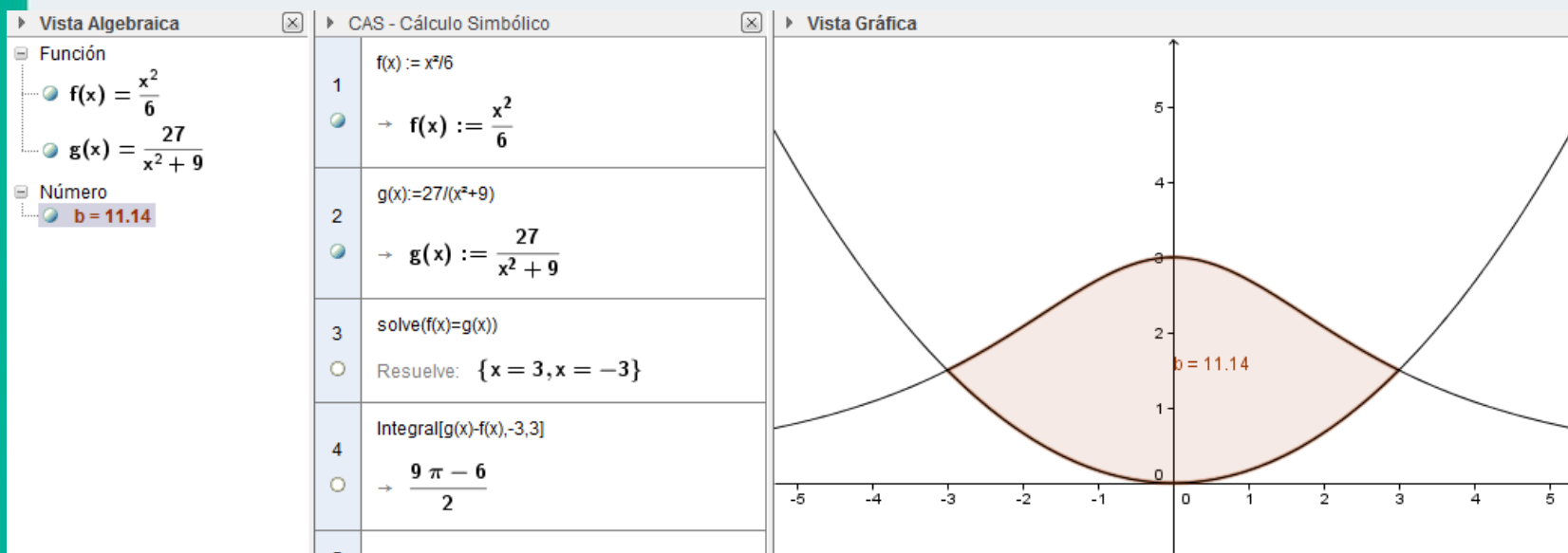
4	Integral[$g(x)-f(x)$,-3,3]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{9\pi - 6}{2}$



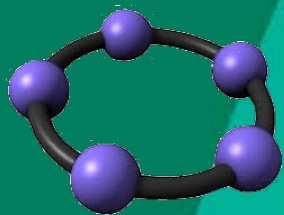
Actividad

Hallar el área encerrada entre las dos curvas siguientes:

$$y = \frac{x^2}{6} \qquad y = \frac{27}{x^2 + 9}$$



`IntegralEntre[f(x),g(x),a,b]`



Cálculo de límites

Límite[función, valor]

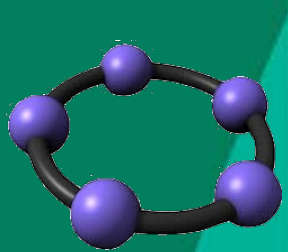
Límite[función, variable, valor]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2 + x} \right)^{3x}$$

CAS - Cálculo Simbólico ✕	
1	Límite[(x ² -2x+1)/(x ³ -x),1] <input type="radio"/> → 0
2	Límite[(1-cos(2x))/x ² ,x,0] <input type="radio"/> → 2
3	Límite[(x/(2+x)) ^{3x} ,∞] <input type="radio"/> → $\frac{1}{e^6}$



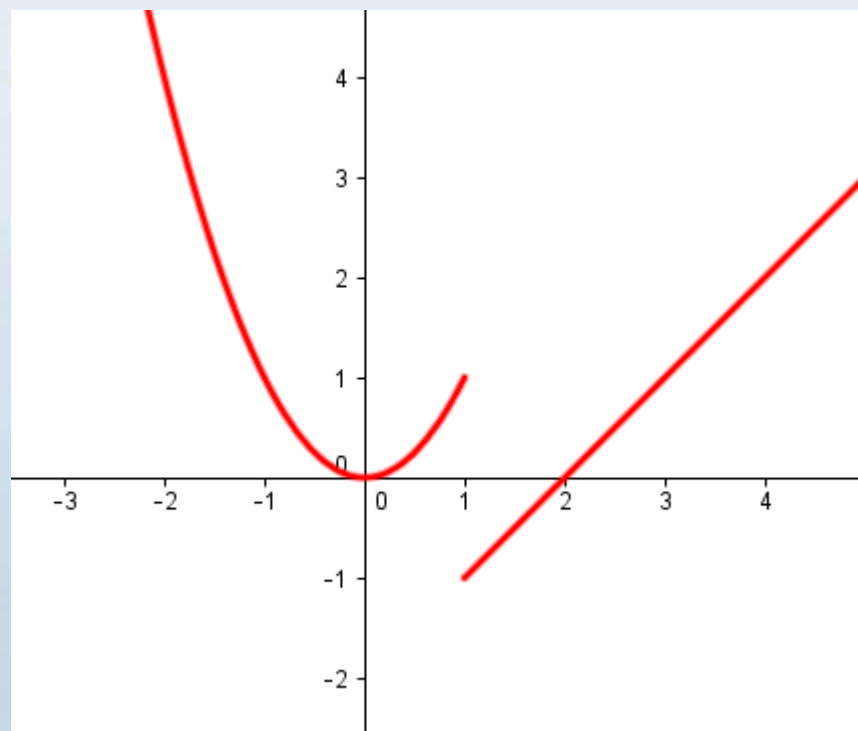
Límites laterales

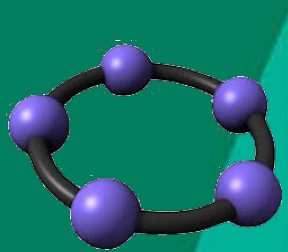
Por la izquierda

Límite Inferior

Por la derecha

Límite Superior



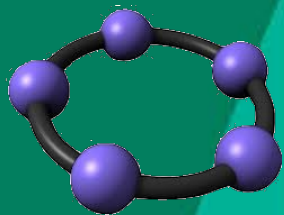


Actividad

Hallar los límites laterales de la función f en el punto $x = 0$, siendo:

$$f(x) = (2 + x)^{\frac{1}{x}}$$

4	$f(x) := (2+x)^{(1/x)}$ <input checked="" type="radio"/> $\rightarrow f(x) := (x+2)^{\frac{1}{x}}$
5	Límite[f(x),0] <input type="radio"/> $\rightarrow ?$
6	LímiteInferior[f(x),0] <input type="radio"/> ≈ 0
7	LímiteSuperior[f(x),0] <input type="radio"/> $\rightarrow ?$



Álgebra matricial

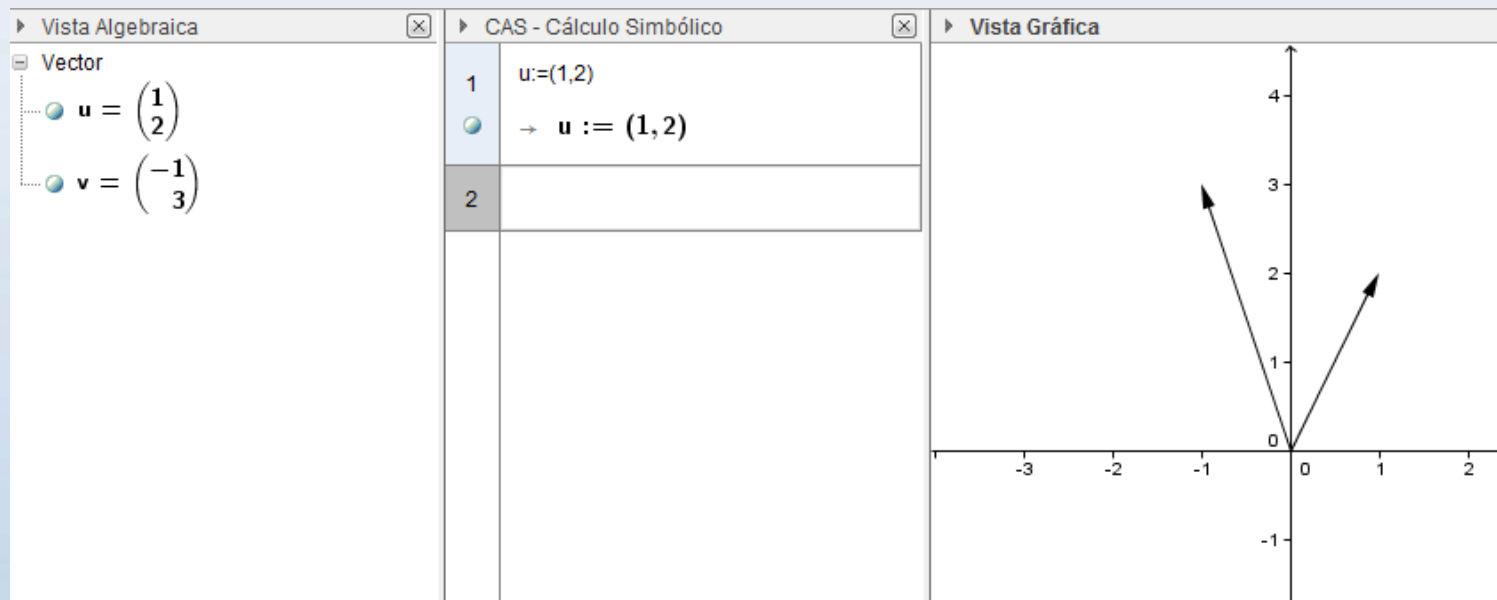
Definición de vectores

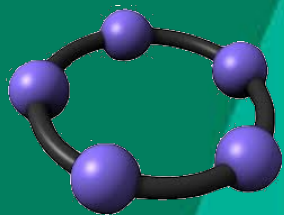
En la vista algebraica

$$u=(a,b)$$

En la vista CAS

$$u:=(a,b)$$





Álgebra matricial

Definición de matrices

En la vista algebraica

$$A = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots\}$$

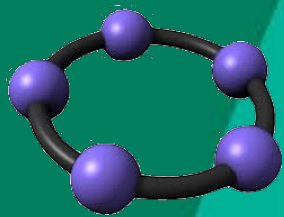
En la vista CAS

$$A := \{\{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots\}$$

The screenshot displays two windows from a mathematical software interface:

- Vista Algebraica:** Shows a list of variables. Under 'Lista', there are two entries:
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 - $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- CAS - Cálculo Simbólico:** Shows a list of CAS commands. Entry 1 shows:
 - $B := \{\{3, 1\}, \{0, 2\}\}$
 - $\rightarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$Entry 2 is empty.

¿Cuál es la diferencia entre las dos opciones anteriores?



Álgebra matricial

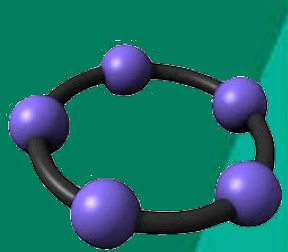
Operaciones con vectores

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$a := \{1, 3, 2\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow a := \{1, 3, 2\}$
2	$b := \{0, -2, 5\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow b := \{0, -2, 5\}$
3	$a + b$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{1, 1, 7\}$
4	$3a + 2b$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{3, 5, 16\}$

ProductoEscalar

ProductoVectorial

5	ProductoEscalar[a,b]
<input type="radio"/>	$\rightarrow 4$
6	ProductoVectorial[a,b]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{19, -5, -2\}$

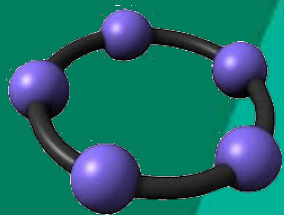


Actividad

Dados los vectores a y b .

Hallar k para que sean perpendiculares.

$$\vec{a} = (1, k, 3) \quad \vec{b} = (-2, 2, 1 - k)$$



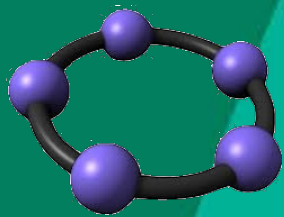
Actividad

Dados los vectores a y b .

Hallar k para que sean perpendiculares.

$$\vec{a} = (1, k, 3) \quad \vec{b} = (-2, 2, 1 - k)$$

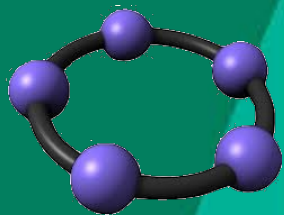
CAS - Cálculo Simbólico	
1	$a := \{1, k, 3\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow a := \{1, k, 3\}$
2	$b := \{-2, 2, 1 - k\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow b := \{-2, 2, -k + 1\}$
3	ProductoEscalar[a,b]
<input type="radio"/>	$\rightarrow -k + 1$
4	Soluciones[(-k + 1)]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{1\}$



Álgebra matricial

Operaciones con matrices

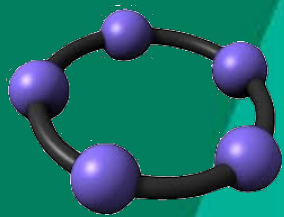
Vista Algebraica	CAS - Cálculo Simbólico
<p>Lista</p> <ul style="list-style-type: none">$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	<p>1</p> <p>$B := \{\{3,1\},\{0,2\}\}$</p> <p>$\rightarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$</p>
	<p>2</p> <p>A+B</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$</p>
	<p>3</p> <p>2A</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$</p>
	<p>4</p> <p>AB</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$</p>



Actividad

Calcula A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Álgebra matricial

Dimensiones de una matriz

Matriz identidad de orden n:

Determinante de una matriz:

Inversa de una matriz:

Transpuesta de una matriz:

Rango de una matriz

Dimensión

Identidad[n]

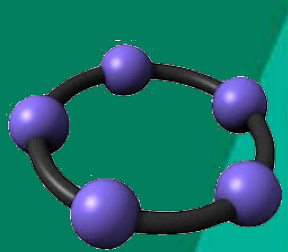
Determinante

Inversa

Traspone

RangoMatriz

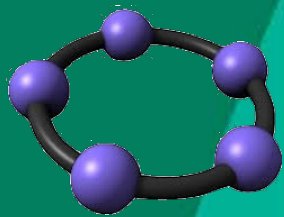
1	$A:={{1,4},{-1,3}}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2	Determinante[A]
<input type="radio"/>	$\rightarrow 7$
3	Inversa[A]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$
4	Traspone[A]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$



Actividad

Calcula el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 9 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$



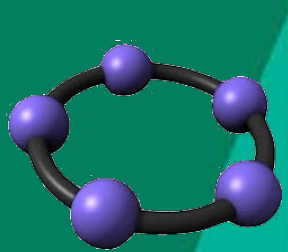
Actividad

Calcula el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 9 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada de la matriz se obtendrá con la función **EscalonadaReducida**

	EscalonadaReducida[A]
3	
○	→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Agustín Carrillo de Albornoz Torres

agustincarrillo@acta.es