

## GeoGebra 3D

Una de las novedades más significativas de la versión 5.0 de GeoGebra (septiembre 2014) fue la incorporación de la vista 3D.

La vista 3D tiene barra de herramientas propia, que contiene herramientas comunes a la vista gráfica 2D y otras específicas para trabajar en el espacio.

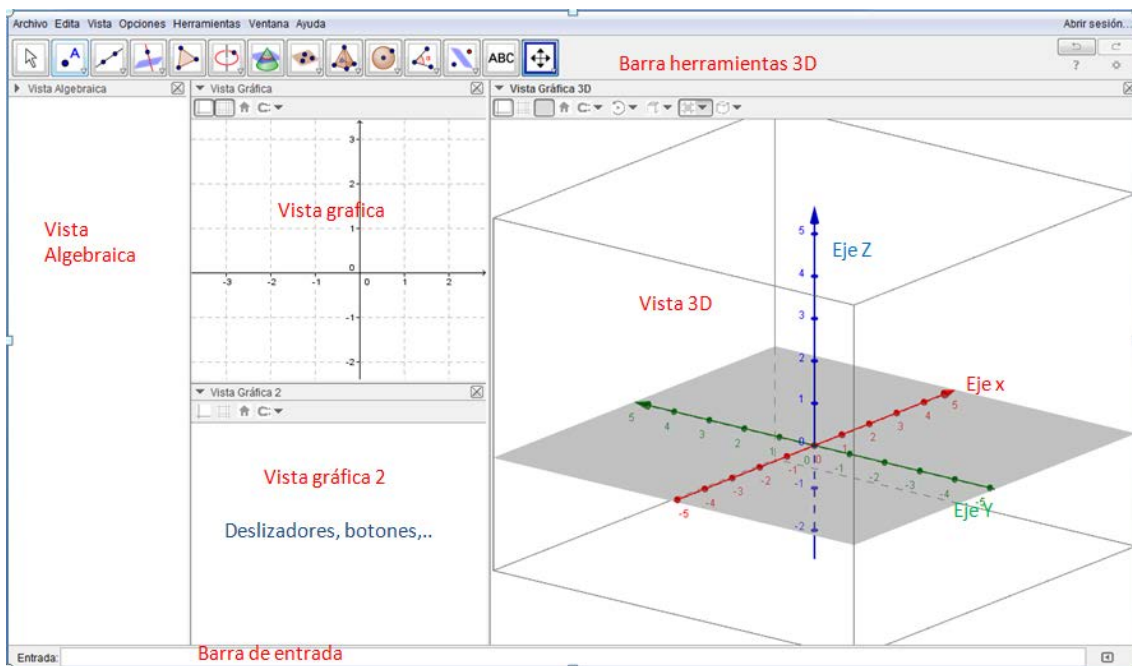


Además de las herramientas de esta barra hay multitud de comandos que amplían las posibilidades de construcción en el espacio.

La vista 3D siguiendo la conocida filosofía GeoGebra está interconectada con el resto de vistas, lo que aumenta su potencia y funcionalidad.

Para trabajar en la vista 3D, es conveniente que ésta ocupe una parte grande de la pantalla, las vistas algebraica y gráfica (o gráfica 2) deben estar presentes, por lo que es bueno tener una disposición de pantalla en que nos sintamos cómodos.

Una disposición adecuada puede ser como se muestra:




No es mala idea guardar un archivo como el que se muestra sin contenido para cuando se vaya a hacer construcciones utilizando vista 3D.


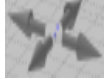

Ocasionalmente pueden abrirse otras ventanas: CAS, Hoja Cálculo, proyección 2D,...



## 1.- Primeros pasos con GeoGebra 3D

### Creación de Puntos 3D

- Si se selecciona la herramienta punto  y hacemos clic en la vista 3D, el punto se crea sobre el plano XY.

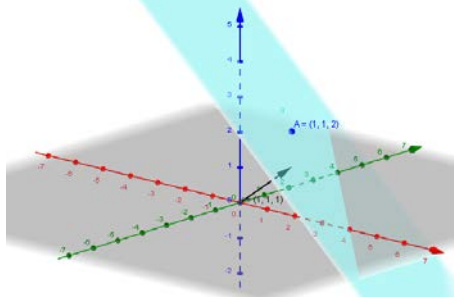

Este punto puede desplazarse  con el ratón, bien sobre el plano XY o bien verticalmente.	Al hacer clic en el punto sale una de estas imágenes:			
		Desplazamiento sobre plano XY		Desplazamiento vertical.

- En la barra de entrada podemos introducir directamente sus coordenadas  $A=(1,1,2)$  y el punto se crea en esa posición que puede moverse con ratón como se ha indicado.

### Rectas, segmentos, vectores, planos,...

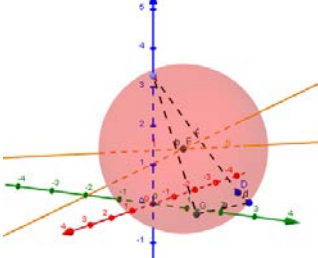



- Se crean automáticamente de forma similar a vista grafica 2D.

#### Ejercicio 1.1. Representa el plano p que pasa por $A=(1,1,2)$ con vector normal $v=(1,1,1)$ .

$A=(1,1,2)$	
$v=(1,1,1)$	
 Plano perpendicular y selecciona el punto y el vector.	
Salvo que se indique lo contrario A (mayúscula)=GeoGebra entiende es un punto. v (minúscula)=entiende es un vector, lo que ahorra escritura.	
¡Qué listo es GG!	
Seleccionando con ratón derecho en vista grafica 3D o en vista algebraica se accede a propiedades del objeto para cambiar aspecto visual.	

La utilización de deslizadores permite construir objetos con uno o más parámetros variables.

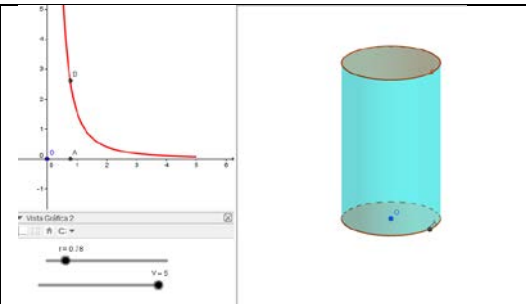
#### Ejercicio 1.2 Dados cuatro puntos no coplanarios construye la esfera que pasa por ellos.

Crea tres puntos, A,B,C sobre el plano $z=0$ y un punto D fuera del plano XY .		
Construye los segmentos $AB=a$ , $BC=b$ , $CD=c$		
<b>PlanoBisector[ &lt;Segmento&gt; ]</b> y representa los tres planos		
	Intersección de dos superficies y construye las dos rectas.	
	Punto intersección de rectas.	
	Esfera[<centro>,<punto>]	
Crear herramienta personal para automatizar procedimiento.		

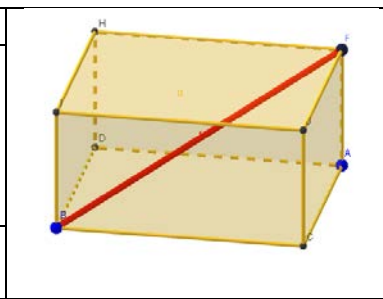
Puede resolverse el problema de forma más precisa resolviendo el sistema de ecuaciones de los tres planos desde la vista CAS.



**Ejercicio 1.3 Construir un cilindro de volumen dado y estudiar variación altura respecto al radio.** 🌀

Crea en vista gráfica 2 dos deslizadores $V$ (volumen) y $r$ (radio).	
<b>Circunferencia</b> [ <Punto>, <Número (radio)> ]	
$h=V/(\pi r^2)$ en barra de entrada	
<b>Cilindro</b> [ <Círculo>, <Altura> ]	
Para cada valor de $V$ , modifica $r$ .	
Representa en vista gráfica variación de altura respecto al radio para $V$ constante.	

**Ejercicio 1.4 Construye un prisma rectangular y su diagonal. Comprobar teorema Pitágoras en espacio.** 🌀

Basta crear un rectángulo (base)	
<b>Prisma</b> [ <polígono>, <punto> ]. Si queremos prisma recto, el punto ha de estar sobre la perpendicular a la base por el primer punto del polígono.	
<b>Prisma</b> [ <polígono>, <altura> ]. El número altura mejor introducirlo previamente como deslizador	
Para obtener valor exacto de diagonal utilizar vista CAS.	
<b>Distancia</b> [ <punto>, <objeto> ]	

Hay un pequeño problema al calcular distancias de un punto en plano  $xy$  a un punto fuera de él. ¿bug?


Con la utilización simultánea de las Vistas 3D y CAS se representan y resuelven con facilidad los problemas de geometría analítica en el espacio.

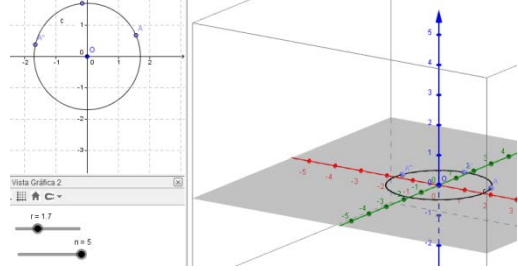
**Ejercicio 1.5. Resolver gráficamente uno de los siguientes problemas.**

1. Calcula la distancia del punto  $A(-1,1,2)$  al plano  $a: 3x - 2y + z = 8$ . 🌀
2. Calcular la recta contenida en el plano  $\pi_1: x + y + z = 3$ , paralela al plano  $\pi_2 \equiv x = 0$  que pasa por el punto simétrico de  $B(-1, 1, 1)$  respecto de  $\pi_2$ . 🌀
3. Determinar las ecuaciones de los planos paralelos a  $\pi: 12x + 3y - 4z = 7$  que distan 6 unidades de  $\pi$ . 🌀
4. Dado el punto  $O=(0,0,0)$  y el plano  $\pi: x+y+z=6$ . 🌀
  - a) Ecuación de recta  $r$  que pasa por  $O$  y es perpendicular a  $\pi$ .
  - b) Coordenadas del simétrico de  $O$  respecto a  $\pi$ .
  - c) Ecuación del plano que contiene al eje  $X$  y a la recta  $r$ .



## 2.- Poliedros regulares con GeoGebra 3D

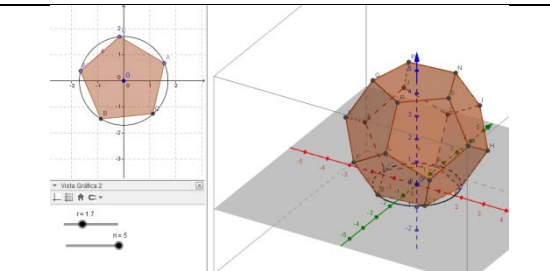
1.- Para construir poliedros regulares es útil una plantilla del tipo: 

<p>Deslizador r entre 0 y 5, r= radio de polígono base. Deslizador n entre 3 y 5 de incremento 1. n = numero lados polígono. Circunferencia de centro O= (0,0) y radio r. A=Punto[c] A'=Rota[A, 360° / n, O] A''=Rota[A', 360° / n, O]</p>	
--	--

Guarda el archivo como plantillapoliedros. En GGtube plantillapoliedros2 un poco más completa que permite controlar valor del radio o arista.

### Ejercicio 2.1 Construir poliedro regular y su desarrollo plano.

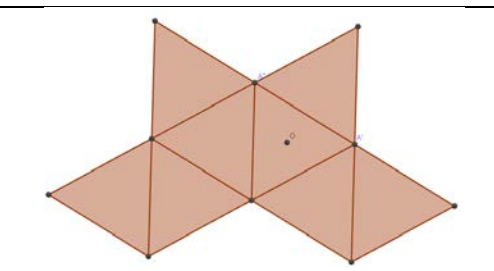
**NombrePoliedro[A,A',A'']** NombrePoliedro= Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.

<p>n=3 , Tetraedro, Octaedro, Icosaedro n=4 , Cubo n=5 Dodecaedro</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Modifica r</li> <li>- Animar construcción</li> <li>- Cambiar estilo visual</li> <li>- ...</li> </ul>	
---	---

Puede ocultarse vista gráfica si se desea.



**Desarrollo plano de poliedros.** (Valido también para prismas y pirámides)






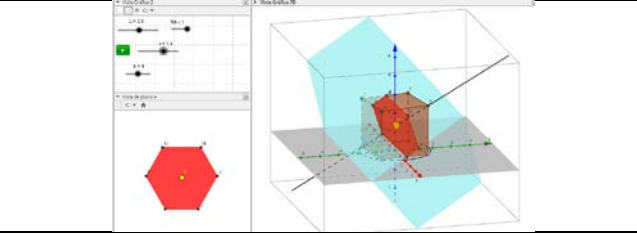
**Desarrollo [<poliedro> , <número> ]** número entre 0 y 1. Si se pone como deslizador vemos el proceso de desarrollo. Existe un comando más detallado para indicar sucesión de caras y aristas por las que hacer el desarrollo.

<p>Construye un octaedro y su desarrollo plano. Marca uno de los vértices con distinto color y tamaño. Cambia el tamaño y color de uno de los puntos. ¿Qué puntos coinciden con el marcado al cerrar el poliedro?</p>	
---	--




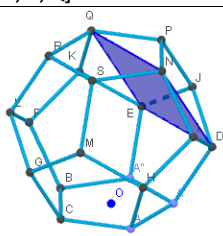
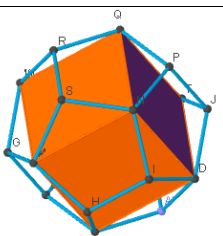
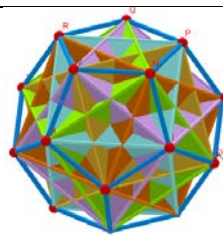
**Cortes en el cubo.**

**Ejercicio 2.2** Estudiar las secciones al cortar un cubo por un plano perpendicular a la diagonal principal.  

	Construye un cubo con la plantilla creada, $n=4$ . a: Cubo[A,A',A''] .	
	Selecciona herramienta recta y pincha en dos vértices opuestos del cubo. Denota $r$ a la recta.	
	Crea un punto P sobre la recta.	
	Herramienta Plano perpendicular y selecciona la recta y el punto sobre ella.	
	Mueve el punto dentro del cubo.	
<b>Interseca[a, r]</b>		
Clic derecho sobre el plano, y selecciona "representación 2D de ..." Se abre una nueva ventana.		
Cierra la vista gráfica y sitúa ahí la nueva ventana. Si es necesario centra el contenido de dicha ventana.		
Desplaza el punto y observa los cortes en la ventana representación 2D del plano.		Puede hacerse un estudio similar respecto a planos diferentes.
Hacer construcción similar para otros poliedros. Estudio de cortes en cada caso		

**Inscribir un poliedro regular en otro.**

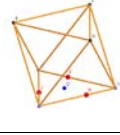
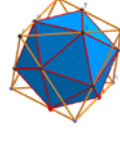
**Ejercicio 2.3.- Inscribir un cubo en un dodecaedro.** 

Sobre la plantilla de apartado 1. Seleccionar $n=5$ .		
<b>Dodecaedro[A,A',A'']</b>		
	Construir polígono eligiendo 4 puntos que formen cuadrado. E,D,N,Q .	
Cubo[D,N,Q]. Sea b nombre del cubo.		
		
Mediante rotaciones del cubo sobre el eje Z puede construirse la figura de la derecha donde se representan cinco cubos en el dodecaedro.		
<b>Rota [b, 72°, EjeZ]</b> Repetir tres veces cambiando el nombre del cubo a rotar o bien el ángulo.		

Puede hacerse de una sola vez mediante una secuencia, pero en este caso quedarían todos los cubos de igual color. **Secuencia [Rota [b, (i 72)°, EjeZ], i, 0, 4]** .


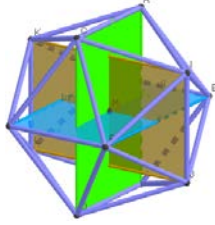



**Ejercicio 2.4. Inscribir un icosaedro en un octaedro.** 

<p>A) Dividir la arista del octaedro en razón áurea.</p> <p>a) Construir numero de oro <math>f = (1 + \sqrt{5})/2</math>.</p> <p>b) Hacer nueva herramienta que dado un segmento, mejor sus extremos, lo divida de acuerdo a esta razón.</p> <p>c) Si el segmento es <b>BC</b>, <math>D = B + (C - B)/f</math>. Guardar herramienta.</p> <p>d) Aplicar la herramienta a tres aristas de la misma cara. I, J, H</p> <p>B) <b>Icosaedro</b>[&lt;punto&gt;, &lt;punto&gt;, &lt;punto&gt;]</p>	 
--	---

**Ejercicio 2.5. Construir un icosaedro a partir de tres rectángulos de oro perpendiculares.** 

Una forma cómoda de hacerlo es la siguiente:

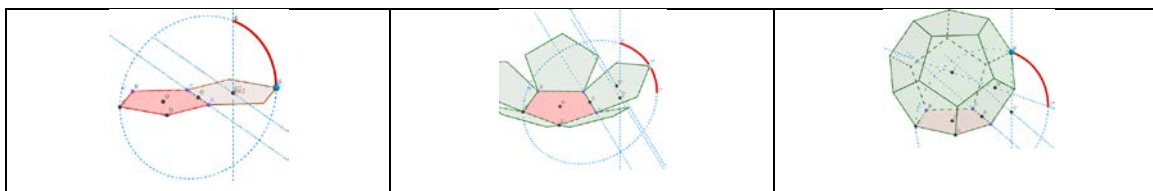
	Un deslizador h entre 1 y 4 para poder variar el tamaño del icosaedro mediante homotecias.	
	Definimos $a=0$ , $b=h$ , $c=h(1 + \sqrt{5})/2$	
	$A=(a, b, c)$ , $B=(a, b, -c)$ , $C=(a, -b, c)$ $D=(a, -b, -c)$	Esta permutación de $a=0, b=1, c=\phi$ construye los tres rectángulos de oro.
	$E=(b, c, a)$ , $F=(b, -c, a)$ $G=(-b, c, a)$ $H=(-b, -c, a)$	
	$I=(c, a, b)$ $J=(c, a, -b)$ , $K=(-c, a, b)$ $L=(-c, a, -b)$	
De forma alternativa se puede construir un rectángulo áureo, y mediante rotaciones con los ejes construir los otro dos.		
Basta ahora construir los 20 triángulos, un poco tedioso. Se construye uno de ellos y se hacen secuencias, o bien, <b>Icosaedro</b> [<punto>, <punto>, <punto>] para comprobar.		
	Recta por dos vértices opuestos de un rectángulo	
	Es posible que la versión 5.2 incorpore el comando <b>poliedro</b> que evitará este proceso. ¿Bastará escribir <b>Poliedro</b> [<polígono1>, <polígono2>, ...]	

**Construcción “con regla y compás” de poliedros regulares**

**Ejercicio 2.6. Construcción de dodecaedro a partir de una cara.** 

Partiendo del polígono de sus caras no es difícil la construcción de los poliedros regulares.


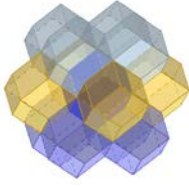
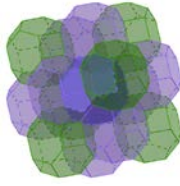
Procedimiento para construir el dodecaedro a partir de un pentágono regular.



De forma análoga se hace para el resto de poliedros regulares. Tetraedro y cubo, mucho más sencillo.



**Poliedros convexos que rellenan el espacio.**

		
Cubo	Dodecaedro rómbico	Octaedro truncado. Sólido de kelvin

**Ejercicio 2.7. a) Construcción del dodecaedro rómbico.** 

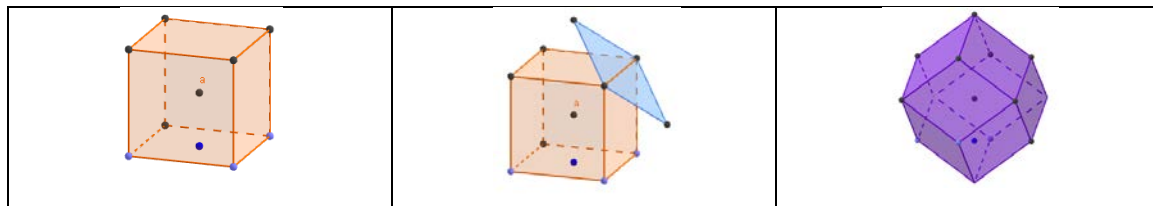
Simetría del centro del cubo respecto de dos caras contiguas. Construir rombo.

Para agilizar el proceso de formar los 12 rombos: Secuencia[rota [rombo1,i 90º,EjeZ],i,0,3]

Refleja [lista1, <centro del cubo>], de forma similar los cuatro rombos restantes.

Crear una lista formada por las tres listas anteriores: dodecaedro queda definido objeto.

Si no se muestra la nueva lista, hacer una traslación de ella por el vector (0,0,0) y se muestra. ¿Bug?



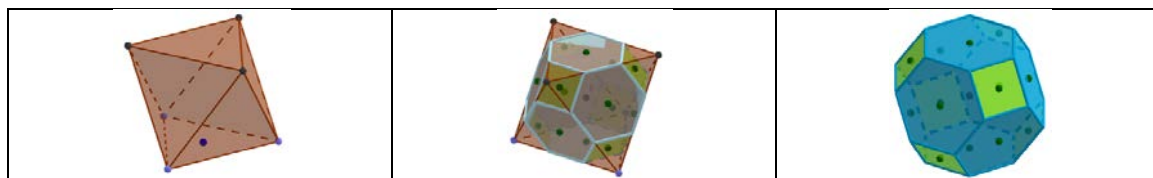
**b) Comprobar que el dodecaedro rómbico rellena el espacio.** 

Basta hacer simetría del dodecaedro con respecto al centro de cada cara. Mejor con listas.

**Ejercicio 2.8 Solido de Kelvin. Octaedro truncado.**

**a) Construcción de octaedro truncado.** 

- Construcción del octaedro. Usando la plantilla es inmediato. Octaedro[A,A',A'']
- Dividir cada segmento en tres partes. Una herramienta personal agiliza el proceso.
- Hexágono por los puntos a 1/3 de cada arista. Herramienta personal.
- Construir los 6 cuadrados.
- Puede hacerse una lista con los ocho hexágonos y los seis cuadrados.

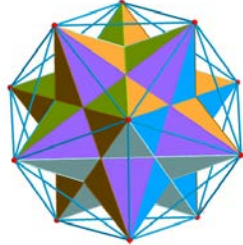
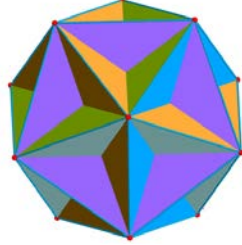




**b) Comprobar que el poliedro de Kelvin rellena el espacio.** 



- Crear centros de hexágonos y cuadrados. Mejor en lista también.
- Refleja[poliedrokelvin, Elemento[listacentros,i]],i,1,14]



**Poliedros regulares estrellados.**

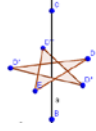
<p><b>Pequeño dodecaedro estrellado {5/2,5}</b> Doce pentagramas</p>	<p><b>Gran dodecaedro {5,5/2}</b> Doce caras pentágonos.</p>
	<p style="text-align: center;">Duales</p> 
	<p style="text-align: center;">Duales</p> 
<p><b>Gran dodecaedro estrellado {5/2,3}</b> Doce pentagramas.</p>	<p><b>Gran icosaedro {3,5/2}</b> Veinte triángulos equiláteros.</p>

**Ejercicio 2.9 Construcción de Pequeño dodecaedro estrellado.** 

<p>Existen varias construcciones, una de ellas, basta prolongar aristas del dodecaedro formando una pirámide pentagonal sobre cada cara.</p>		
--	---	---

**Construcción del pequeño dodecaedro estrellado a partir del icosaedro.** 

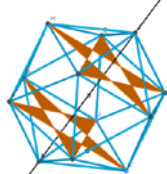
a) Herramienta personal que construya un pentagrama, dado un eje y un punto exterior.

<p><math>B=(1,1,1)</math>, <math>C=(1,1,5)</math>, <math>D=(2,2,2)</math>, <math>a=Recta[B,C]</math>,  <math>D'=Rota [D, 144^\circ, a]</math> Repetir tres veces.  <b>Polígono [D,D',D'',D''', E]</b> .</p>	
---	---

Crear herramienta. Objetos salida Polígono, objetos entrada, D, a. Guardar herramienta

Pueden ocultarse o borrarse los objetos que hemos creado para construir la herramienta.

b) Construir Icosaedro[A,A',A'']






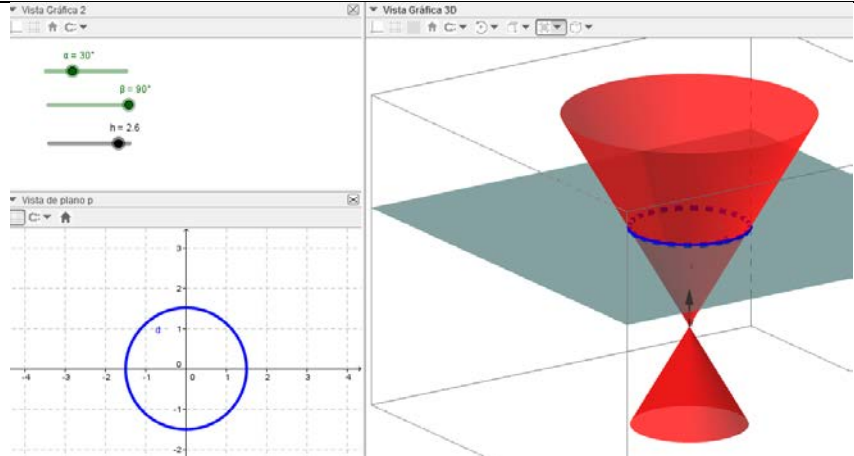
<p>Construimos recta por vértices opuestos y utilizamos la herramienta pentagrama.          Dos pentagramas por cada recta.          Poner los pentagramas en distinto color para que se distingan las caras, pentagramas.</p>	
--	---





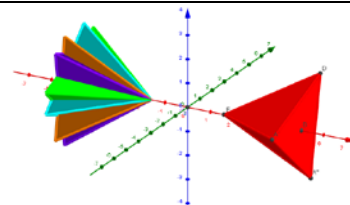
### 3.- Secciones Cónicas

**Ejercicio 3.1. Construir un cono infinito y un plano que al cortar se generen las cónicas:** 

	$\alpha$ ángulo entre 1 y 90 grados e incremento 1 grado	Crea estos tres deslizadores.
	$\beta$ ángulo entre 1 y 90 grados, incremento 1	
	h entre 1 y 4 incremento 0.1.	
	Pincha en el origen de coordenadas. $O=(0,0,0)$	
	$v=(0,0,1)$ vector sobre eje Z.	
	ConoInfinito[O,v, $\alpha$ ] crea el cono	
	a=Plano[EjeX,EjeZ] o bien a:y=0	Con estas operaciones conseguimos un plano fácilmente desplazable en ángulo y corte con eje Z
	Rota[a, $\beta$ ,EjeY] sea b el plano que se obtiene	
	Traslada[b,(0,0,h)] llama p a este plano.	
	Selecciona la herramienta Intersección de dos superficies y haz clic en cono y plano. O bien escribe <b>Interseca[nombreplano, nombrecono]</b>	
	Pincha con botón derecho sobre el plano y selecciona: Representación 2D de nombreplano. Se abre una nueva ventana que representa el plano y los elementos que este contiene en una nueva vista grafica.	
		
Basta mover deslizadores para ver las diferentes conicas que se generan incluidas las degeneradas: punto, recta y dos rectas secantes.		
Incluir en la construcción textos con el nombre de la cónica que resulta en función de los valores de los parámetros $\alpha, \beta, h$ .		

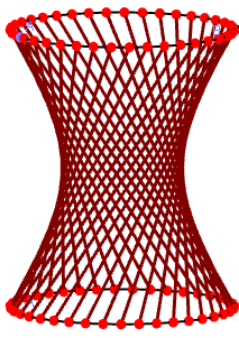

### 4.- Simetrías en el espacio.

En el espacio hay tres simetrías, respecto a un punto, respecto a un eje y respecto a un plano. En la siguiente construcción se observa la diferencia entre ellas.



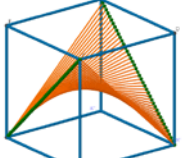
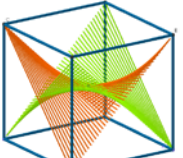
## 5.- Superficies regladas.

### Ejercicio 5.1. Construir un hiperboloide como superficie reglada

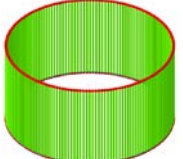
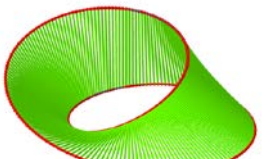
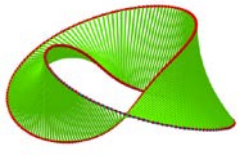
<p>                     Abrir el archivo plantillapoliedros. Borrar los puntos A' y A''.                      Modificar n que varía entre 3 y 100                      Deslizador h, entre 1 y 5 incremento 0.1                      Deslizador <math>\alpha</math> angular entre 0 y 360  <b>Secuencia[Rota[A, i 360°/n,O],i,1,n]</b>  <math>v=(0,0,h)</math> , Traslada[c,v], B=Traslada[A,v]                      Rota[B, <math>\alpha</math>,EjeZ], se obtiene B'  <b>Secuencia[Rota[B',i 360°/n,EjeZ],i,1,n]</b>  <b>Zip[segmento[A,B],A,lista1,B,lista2]</b>                      Modifica valor <math>\alpha</math> </p>	
<p>                     Puede también construirse hiperboloide como superficie. Basta introducir la ecuación:                      Superficie[cos(a) + b sen(a), sen(a) - b cos(a), b, a, 0, 2<math>\pi</math>, b, -3, 3]                 </p>	

### 5.2. Superficie reglada sobre un cubo.

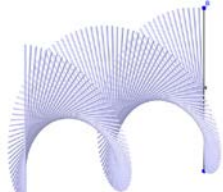
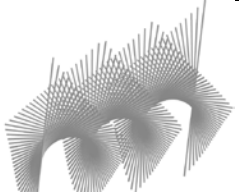
Construir cubo, sobre el dos diagonales de caras opuestas y la construcción que se muestra.

	<p>Basta una simetría respecto al centro del cubo para obtener la imagen de la derecha.</p>	
---	---	---

### 5.3 Banda de Moebius como superficie reglada.

		
---	---	---

### 5.4 Otras superficies regladas.


	<p>Por traslación y rotación de un segmento se construye estas conocidas superficies regladas.</p>	
---	--	---


## 6.- Otras curvas y superficies.

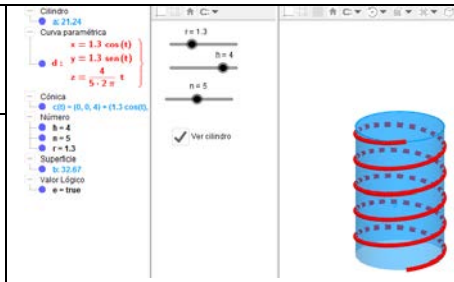
### Hélices

#### Ejercicio 6.1 a) Construir un cilindro de altura H y radio y una hélice sobre cilindro.

En GeoGebra 3D los rastros son permanentes mientras no los borremos.

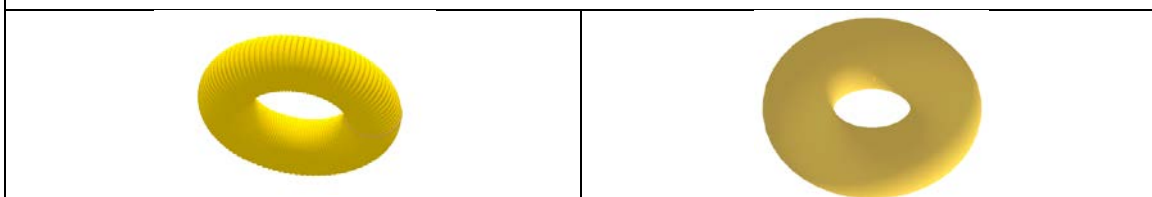
Dos deslizadores H y r que determinan altura y radio del cilindro	
$A=(0,0,0)$ $B=(0,0,H)$	
Cilindro $[A,B,r]$ se construye el cilindro.	
Deslizador n entre 0 y 4. n es el numero de vueltas de la hélice	
Deslizador ang entre 0 y $2\pi$ n	
Punto C sobre la circunferencia de la base del cilindro.	
$C' = \text{Rota}[C, \text{ang}, \text{EjeZ}]$ . C da sobre la circunferencia n vueltas.	
$\text{Traslada}[C', \text{Vector}[(0, 0, H \text{ ang} / (2\pi n))]]$	
Podemos ahora poner botones de animar, detener animación,...	

Podemos también construir una hélice como curva: 

<p>Construir tres deslizadores: r = radio, h = altura, n= numero vueltas.</p>	
<p>Circunferencia<math>[(0,0,0),r]</math>, sea c la circunferencia Cilindro<math>[c,h]</math> Curva<math>[r \cos(t), r \sin(t), h / (n 2 \pi) t, t, 0, 2n \pi]</math> Se construye la hélice sobre el cilindro que da n vueltas.</p>	

### Toro

Construcción de un todo haciendo girar una circunferencia y como superficie.



La superficie es en este caso:

$$\text{Superficie}[(R + r \cos(u)) \cos(v), (R + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u), u, 0, 2\pi, v, 0, 2\pi]$$

R y r son los radios que podemos poner como deslizadores.

Las construcciones están disponibles en GeoGebraTube

<https://tube.geogebra.org/material/show/id/1122093> . Basta poner arranz en el buscador de GGTube para acceder.