Cómo trabajar (de verdad) con el CAS de GeoGebra en el aula

Carlos Giménez, Associació Catalana de GeoGebra

<carlos.gimenez@gmail.com>

Antes de empezar:

Asegurémonos de tener como idioma de trabajo el castellano:

Opciones -> Idioma -> R-Z -> Spanish / Español (España)

Trabajaremos con la ventana CAS, por eso cerraremos el resto de ventanas:

Vista -> Cálculo Simbólico (CAS) para activar esta ventana Vista -> Desactivamos una por una todas las demás ventanas activas (también se pueden cerrar con la cruz que tiene cada una en la esquina superior derecha

Un consejo para proyectar mejor . . . y para la presbicia: aumentar el tamaño de letra

Opciones -> Tamaño de letra -> Seleccionar un tamaño a partir de 18, 20, . . .

Cuatro ideas básicas sobre el CAS de GeoGebra:

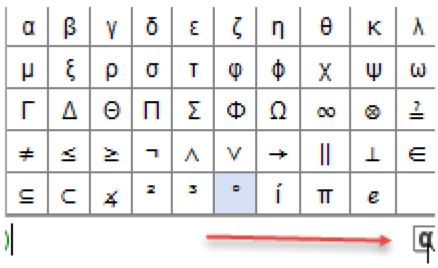
Las expresiones se introducen de forma "natural" (/ para la división, ^ para los exponentes y sqrt() para las raíces cuadradas). Los números trascendentes e, pi y i se deben introducir cómo Alt+e, Alt+p y Alt+i respectivamente.

El producto se sobreentiende entre un número y texto (3x) pero entre dos letras se debe especificar con un espacio en blanco o con el símbolo *.

Cuando abrimos un paréntesis (), corchete [] o llave {}, GeoGebra automáticamente genera el símbolo de cierre correspondiente; es cómodo pero debemos tenerlo presente. Los vectores y las matrices se deben introducir entre llaves {} y con las componentes separadas por comas.

Es muy útil asignar nombres a algunas expresiones, ya que eso permite referirse a ellas en cálculos posteriores por su nombre. Se consigue con el signo :=

La unidad angular por defecto es el radián, para indicar un ángulo en grados se debe utilizar el símbolo correspondiente de la paleta de símbolos:



Entradas Básicas

- Enter o Intro, evalúa la entrada
- Ctrl + Enter, valora numéricamente la entrada
- Alt + Enter confirma la entrada pero no la evalúa

En una entrada de fila vacía:

- La barra espaciadora repite la salida previa
- El paréntesis cerrado) reproduce la salida previa, entre paréntesis
- El signo igual = repite la entrada previa

Podemos referirnos a celdas anteriores:

- § Referencias estáticas: copian el contenido de la celda referida y no se actualizan si se modifica el valor de dicha.
    - § # copia la última salida
    - § #n copia la salida de la celda n
    - § Clicando en una celda se copia su salida

- § Referencias dinámicas: insertan una referencia al contenido de una celda, que se actualiza cuando cambia el valor de dicha celda.
    - § $ inserta una referencia a la salida de la última celda
    - § $n inserta una referencia a la salida de la celda n

Diferentes usos del signo =

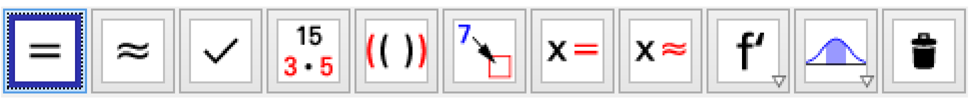
- El signo = se utiliza para las ecuaciones
- El signo := sirve para hacer asignaciones de variables
- El signo == se utiliza para el control Booleano de una igualdad, dando como resultado un valor verdadero o falso.

h:=2 le asigna a la variable h el valor 2

h=2 en lugar de asignarle a h el valor 2, creará una función h con el valor constante 2

h == 2 evaluará si la variable h (definida previamente) equivale a 2

Barra de herramientas del CAS



Cómo trabajar (de verdad) con el CAS de GeoGebra en el aula . . . a partir de catorce tipos de ejercicios

Carlos Giménez, Associació Catalana de GeoGebra carlos.gimenez@gmail.com

I> Operaciones con números complejos en forma binomial		
nº	Enunciados	Soluciones
1	Realizar la operación indicada $\frac{(2-4i)-(5+3i)}{(4-2i)}$	$\frac{1-17i}{10}$
2	Realizar la operación indicada $(6+5i)-\frac{(3-i)}{(2-i)}$	$\frac{23+24i}{5}$
3	Realizar la operación indicada $\left[(2-i)\cdot(5+i)\right]^3$	$1034-1062i$

II> Operaciones con potencias y raíces		
nº	Enunciados	Soluciones
1	Racionalizar $\frac{2+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$	$10+7\sqrt{2}$
2	Simplificar $\left(\frac{\frac{(a^3b^2)^3}{a^2(a^4b^{-3})^{-2}}}{a^4(a^{-4}b^5)^3}\right)^5$	$\frac{a^{115}}{b^{75}}$
3	Simplificar $6\sqrt{18}+3\sqrt{50}-4\sqrt{32}+5\sqrt{72}$	$47\sqrt{2}$

III> Binomio de Newton		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$(2a^3b^2-a^4b^3)^4$	$a^{16}b^{12}-8a^{15}b^{11}+24a^{14}b^{10}-32a^{13}b^9+16a^{12}b^8$
2	$(-3a^2b^3-4a^5b^2)^3$	$-64a^{15}b^6-144a^{12}b^7-108a^9b^8-27a^6b^9$
3	$(a^4b+2ab^4)^3$	$8a^3b^{12}+12a^6b^9+6a^9b^6+a^{12}b^3$

IV> Ecuaciones racionales		
nº	Enunciados	Soluciones
1	Resolver $\sqrt{3x-8}-1=\sqrt{x+5}-2$	$x=-4 \quad x=11$
2	Resolver $\sqrt{3x+1}-4=2-\sqrt{x-1}$	$x=5 \quad x=65$
3	Resolver $\sqrt{x+8}=\sqrt{3x+1}+1$	$x=1 \quad x=8$

V> Ecuaciones trigonométricas		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$2\cos x=3\tan x$	$x=2k_1\pi+\frac{5}{6}\pi \quad x=2k_2\pi+\frac{1}{6}\pi$
2	$\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$	$x=2k_1\pi+\frac{1}{3}\pi, x=2k_1\pi+\frac{2}{3}\pi$ $x=2k_2\pi-\frac{1}{3}\pi, x=2k_2\pi+\frac{4}{3}\pi$
3	$\cos^2 x-3\sin^2 x=0$	$x=2k_1\pi-\frac{1}{6}\pi, x=2k_1\pi+\frac{1}{6}\pi$ $x=2k_2\pi-\frac{5}{6}\pi, x=2k_2\pi+\frac{5}{6}\pi$

VI> Ecuaciones exponenciales y logarítmicas		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$3^x=2^{x-1}$	$x=-1.7095$
2	$2\log x=3+\log\frac{x}{10}$	$x=100$
3	$\begin{cases}\log x+2\log y=5\\ 3\log x-\log y=1\end{cases}$	$x=10, y=100$

VII> Ecuaciones matriciales		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A\cdot X=2B$	$X=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ $A+BX=B^t$	$X=\begin{pmatrix}-\frac{13}{3} & \frac{8}{3}\\ \frac{14}{3} & -\frac{13}{3}\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $AX-B=BX-A$	$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

VIII> Sistemas de ecuaciones lineales		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$\begin{cases}x+y+z=6\\ -2x+3y-2z=-2\\ 4x+3y+5z=25\end{cases}$	$x=1\quad y=2\quad z=3$
2	$\begin{cases}-x-5y+3z=-1\\ -5x-4y-4z=-9\\ 3x+3y+5z=-1\end{cases}$	$x=5\quad y=-2\quad z=-2$
3	$\begin{cases}x-2y=-7\\ x-5y+5z=4\\ 3x-4y+z=-11\end{cases}$	$x=-1\quad y=3\quad z=4$

IX> Ecuaciones combinatorias		
nº	Enunciados	Soluciones
1	$V_{x,1}+V_{x,2}+V_{x,3}=26x$	$x=6$
2	$\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=x+1$	$x=3$
3	$\binom{x}{5}=3\binom{x-1}{3}$	$x=10$

X> Cálculo de elementos de progresiones		
nº	Enunciados	Soluciones
1	En una progresión aritmética $a_1 = 6$ y $d = -2$. Calcular el valor de a_{10}.	$a_{10}=-12$
2	Calcular el valor de la suma de los primeros 100 números pares.	$S_{100}=10100$
3	En una progresión geométrica $a_1 = 4$ y $r = ½$. Calcular el valor de a_{15}.	$a_{15}=\frac{1}{4096}$

XI> Operaciones con vectores		
nº	Enunciados	Soluciones
1	Escribir el vector $\vec{v}(1,-3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}(2,-1)\ y\ \vec{v_2}(1,4)$	$(1,-3)=\frac{7}{9}(2,-1)-\frac{5}{9}(1,4)$
2	Escribir el vector $\vec{v}(2,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}(-3,-2)\ y\ \vec{v_2}(5,-3)$	$(2,4)=-\frac{26}{19}(-3,-2)-\frac{8}{19}(5,-3)$
3	Determinar el valor del parámetro a que hace que los vectores $\vec{v_1}(3,-2)\ y\ \vec{v_2}(2a-1,a+2)$ sean perpendiculares.	$a=\frac{7}{4}$

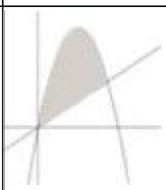
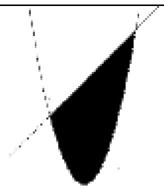
XII> Cálculo de límites

nº	Enunciados	Soluciones
1	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-15x^2+28x-12}{-2x^3+4x^2+8x-16}$	$-\dfrac{9}{8}$
2	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(3-\dfrac{2x^2-5}{x^2+3}\right)^{\frac{4x^3+1}{x-4}}$	e^{44}
3	$\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{4x^2+1}-(2x+3)$	-3

XIII> Cálculos con derivadas

nº	Enunciados	Soluciones
1	Dada $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$ calcular $f''(2)$	$f''(2)=\dfrac{58}{27}$
2	Determinar para qué valores de x se anula la primera derivada de $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x+1}$	$x=-\sqrt{5}-1,\ x=\sqrt{5}-1$
3	Determinar para qué valores de x se anula la segunda derivada de $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$	$x=0$

XIV> Cálculos con integrales

nº	Enunciados	Soluciones
1	 Determinar el área de la región limitada por las funciones: $f(x)=-x^2+15x$ $g(x)=2x$	$S=\dfrac{2197}{6}$
2	Determinar el valor del parámetro k que satisface: $\int_0^1 k\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)^2 dx=\dfrac{14}{9}$	$k=\dfrac{4}{3}$
3	 Determinar el área de la región limitada por las funciones: $f(x)=x^2-4x+3$ $g(x)=x+3$	$S=\dfrac{125}{6}$

I ahora . . . ¿podemos resolver un examen de selectividad con el CAS de GeoGebra?

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemáticas

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sabemos que el vector (2, 1, −1) es solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=a+c\\ bx-y+bz&=a-b-c\\ cx-by+2z&=b \end{aligned}\right\}$$

Calcule el valor de los parámetros a, b y c.

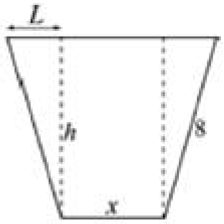
[2 puntos]

2. La curva $y = x^2$ y la recta $y = k$, con $k > 0$, determinan una región plana.
   a) Calcule el valor del área de esta región en función del parámetro k.
   b) Encuentre el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}\,u^2$.
   [1,5 puntos por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*]

3. Sea $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
   a) ¿Qué significa que la matriz B sea la matriz inversa de A?
   b) Encuentre el valor del parámetro p para que la matriz inversa de A y la matriz transpuesta de A coincidan.
   Nota: No aproxime las raíces mediante valores con decimales; trabaje con los radicales.
   [0,5 puntos por el apartado *a*; 1,5 puntos por el apartado *b*]

Districte Universitari de Catalunya

4. Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros. A la derecha tiene un esquema de la sección del canal.



a) Encuentre el valor del segmento L de la gráfica en función de la variable x (anchura inferior del canal).

b) Sabemos que el área de un trapecio es igual a su altura multiplicada por la semisuma de sus bases. Compruebe que, en este caso, el área de la sección viene dada por

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

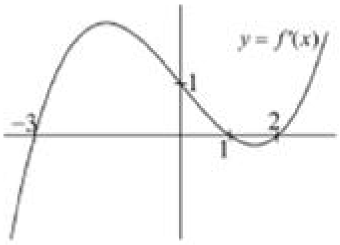
c) Calcule el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima (no es necesario que compruebe que es realmente un máximo).

[0,5 puntos por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*; 1 punto por el apartado *c*]

5. Dados los puntos $P=(1,\ 0,\ -1)$ y $Q=(-1,\ 2,\ 3)$, encuentre un punto R de la recta $r: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ que cumpla que el triángulo de vértices P, Q y R es isósceles, siendo $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ los lados iguales del triángulo.

[2 puntos]

6. La función $f(x)$ es derivable y pasa por el origen de coordenadas. La gráfica de la función derivada es la que puede ver aquí dibujada, siendo $f'(x)$ creciente en los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[2, +\infty)$.



a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Indique las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifique estos extremos.

[1 punto por cada apartado]