CÓNICAS DEL ESPACIO AL PLANO USANDO GEOGEBRA 3D

Esperanza Gesteira Losada[1], Ignacio Larrosa Cañestro[2], Enrique de la Torre Fernández[3], Fernando Zacarías Maceiras[4] (Grupo XeoDin)

[1] CPI Manuel Suárez Marquier, O Rosal (Pontevedra)
[2] IES Rafael Dieste, A Coruña
[3] Facultade de Ciencias da Educación (Universidade de A Coruña)
[4] IES As Mariñas, Betanzos

RESUMEN

Se hace un estudio , dirigido a alumnos de 1º de bachillerato (15-16 años), de las secciones cónicas, utilizando GeoGebra en 3D, partiendo de su definición como secciones de un cono, para obtener su definición como lugares geométricos planos e y haciendo hincapié en la excentricidad como elemento unificador.

ABSTRACT

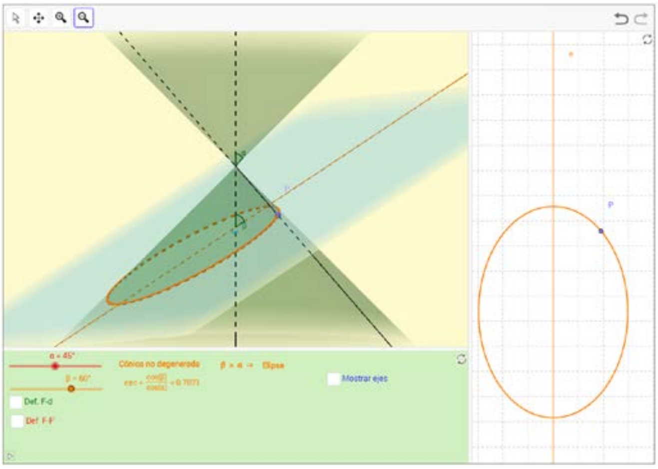
A study of the conic sections is done using GeoGebra 3D and targeting high school students (15-16 years old). The study takes as a starting point their definition as sections of a cone, in order to obtain their definition as planar geometric spaces, highlighting their eccentricity as a unifying element.

Palabras clave: cónicas, geometría, dinámica, GeoGebra,

1. INTRODUCCIÓN

Apolonio de Perga, aunque habían sido estudiadas antes por otros, fue quien profundizó en el estudio de las secciones cónicas, con su obra en ocho tomo *Cónicas,* hasta extremos que tardarían dieciocho siglos en ser superados. En particular, mostró que todos los tipos de cónicas pueden obtenerse a partir de cualquier cono, utilizando secciones por planos con diferente inclinación respecto del eje. Esto le permitió un tratamiento sistemático y uniforme de sus propiedades. También considero por primera vez la superficie cónica completa, concibiendo a la hipérbola como una curva con dos ramas. A él se deben los nombres de elipse, parábola e hipérbola con que ahora las conocemos [1, 5]. Dice que "el tema es de los que parecen ser dignos de ser estudiados por su propio interés".

En los libros de texto de 1º de Bachillerato es frecuente que se haga una más o menos rápida referencia a su obtención como secciones de un cono, apenas para justificar la denominación de *secciones cónicas*, sin derivar de aquí sus principales características y propiedades [3, 4], pasando sin solución de continuidad a su definición como lugares geométricos planos a partir de los focos (elipse, hipérbola) y la directriz (parábola). Podría pensarse que ello se debe a la dificultad de plasmar en el plano de forma comprensible esquemas tridimensionales con más de dos o tres elementos, pero esto no es así, como puede verse incluso en algunos textos dirigidos a alumnos de este nivel [2, 6]. No obstante, el uso de GeoGebra, y muy especialmente su Vista 3D, que permite "ver" una construcción espacial desde cualquier ángulo, facilita considerablemente la exposición, comprensión y aprendizaje de las secciones cónicas. El objetivo de esta comunicación es mostrar cómo se puede partir de la definición espacial, para obtener las propiedades que nos permitan establecer las ecuaciones cartesianas de estas curvas y a partir de estas nuevas propiedades y aplicaciones, dándoles siempre el tratamiento unificado que les corresponde. Para ello se utiliza un applet de GeoGebra, Secciones cónicas. En él se tiene una imagen 3D orientable de una superficie cónica y un plano **ω** que la corta, a la que se puede añadir una o dos esferas tangentes a cono y plano (*Esferas de Dandelin*), y una vista del plano sección **ω** con la cónica y otros elementos contenidos en él. En ambas vistas se visualiza un punto **P** que puede desplazarse por la cónica.



2. DEFINICIÓN DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Los alumnos de este nivel tienen claro el concepto de cono, pero aquí necesitamos algo más, una **superficie cónica completa**:

"*Una superficie cónica completa esta generada por una recta variable que gira alrededor de otra fija, el eje de la superficie, a la que corta en un punto, el vértice, formando siempre con ella un ángulo constante. Consta de dos hojas ilimitadas y simétricas, unidas por el vértice.*"

Esta definición corresponde a una superficie cónica de revolución. Es importante que se comprenda que la superficie es ilimitada, por más que solo se represente una porción necesariamente finita de ella, y que está compuesta por rectas, sus generatrices. En adelante, se usará el término *cono* por superficie cónica completa. Definimos entonces una sección cónica como la intersección de un cono con un plano que no pasa por el vértice. Llamando **α** al ángulo que forman las generatrices del cono con el eje, y **β** al que forma éste con el plano de la sección, tenemos que:

a) Si **β > α**, el plano corta a todas las generatrices a un mismo lado del vértice. Se obtiene una curva cerrada y finita, que llamamos ***Elipse***. En particular, si **β = 90º**, se obtiene una circunferencia, que es por tanto un caso particular de elipse.
b) Si **β = α**, el plano es paralelo a una generatriz, a la que por lo tanto no corta. A todas las demás las corta a un mismo lado del vértice. Tenemos una curva abierta e ilimitada, una ***Parábola***.
c) Si **β < α**, el plano corta a las dos hojas del cono y es paralelo a dos generatrices, a las que por tanto no corta. Se obtiene también una curva abierta e ilimitada, pero con dos *ramas*, una ***Hipérbola***.

El alumno puede familiarizarse en el applet con esta definición variando los ángulos **α** y **β**, con todas las casillas de verificación desactivadas. El ángulo **β** determina la orientación del plano secante, girándolo en torno a un eje paralelo al eje **Oy** que corta al plano **Oxz** en un punto **W** que puede variarse. El vértice **V** del cono está situado en el origen y su eje es el eje **Oz**.

Si el plano secante pasa por el vértice, se obtiene una ***cónica degenerada***. En los mismos casos anteriores, se obtiene respectivamente un punto (el propio vértice), una recta (o un par de rectas coincidentes, dado que plano y cono serían tangentes a lo largo de una generatriz), o un par de rectas secantes (sendas generatrices). Activando en el applet la casilla '***Mostrar ejes***', y colocando el punto **W** en el vértice del cono, se pueden apreciar variando convenientemente el ángulo **β** estas cónicas degeneradas.

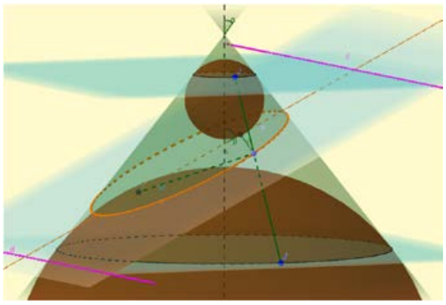
Definimos como puntos interiores a la cónica los que quedan en el interior de la superficie cónica. Esto que aquí parece natural, en el plano no lo es tanto, aunque resulta conveniente para un tratamiento unificado de los tres tipos de cónicas.

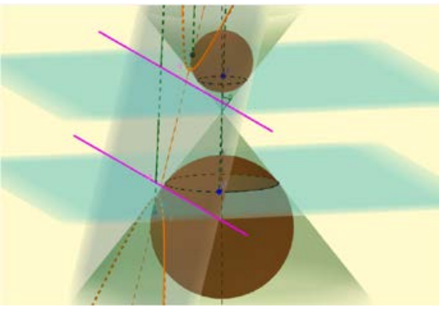
Definimos el eje principal de la cónica como la intersección de su plano con otro perpendicular que pasa por el vértice del cono. Este plano se ve en el applet activando la casilla '***Mostrar ejes***'. Como este es un plano de simetría del cono y del plano sección, la cónica será simétrica respecto de su eje principal. Los vértices principales se definen como los puntos en los que el eje principal corta a la cónica. El punto medio de los vértices es el centro de la cónica, que solo existe en las elipses e hipérbolas. Es importante destacar que la parábola es un caso límite que separa elipses e hipérbolas y que cuando los ángulos son muy parecidos, es difícil apreciar de que curva se trata si se la observa en las inmediaciones de un vértice, a pesar de lo diferentes que son entre si.

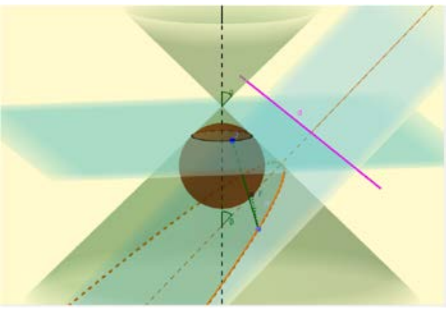
Es importante destacar que la forma de la sección no cambia si se desplaza el plano sección manteniéndolo paralelo a si mismo, mientras no pase por el vértice. Así lo único que hacemos es aplicarle a la cónica una homotecia de centro el vértice del cono. Para ello en el applet puede activarse la casilla '***Mostrar ejes***' y desplazar el punto W. Por el contrario, cambia notoriamente si se modifican los ángulos **α** o **β** separadamente. Definimos entonces la *excentricidad* de da cónica como $\boldsymbol{e} = \frac{\cos(\boldsymbol{\beta})}{\cos(\boldsymbol{\alpha})}$**.** Para las elipses es **e < 1** (**e = 0** para la circunferencia), para la parábola **e = 1**, y para las hipérbolas **e > 1**. Está claro que la forma de la cónica esta directamente relacionada con la excentricidad.

3. EXCENTRICIDAD, FOCOS Y DIRECTRICES

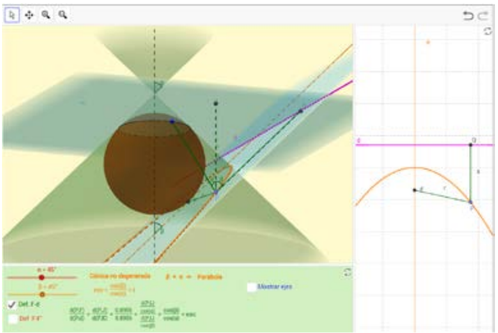
En un cono podemos inscribir una esfera de radio arbitrario con centro en el eje del cono, aumentando su radio proporcionalmente a la distancia de su centro al vértice del cono. Esta esfera es tangente al cono a lo largo de una circunferencia, situada en un plano perpendicular al eje. Si un plano corta al cono, podemos en general obtener dos esferas tangentes simultáneamente al cono y al plano: a distintos lados del plano, si este corta a todas las generatrices a un mismo lado del vértice (**β > α**), o a un mismo lado del plano, pero separadas por el vértice, si el plano corta a las dos hojas del cono (**β < α**); si **β = α** tan solo tenemos una. Los puntos de tangencia de estas esferas con el plano sección son los ***Focos*** **F** y **F'** de la cónica; dos en las elipses e hipérbolas y uno en las parábolas. Los planos m y m' perpendiculares al eje del cono que contienen a las circunferencias **c** y **c'** de contacto del cono y las esferas, cortan al plano sección a lo largo de dos rectas, las ***directrices*** **d** y **d'** de la cónica, cada una correspondiente a un foco. En el caso de la parábola, tenemos una sola esfera, y por tanto un solo foco y una sola directriz.







Consideremos ahora un solo foco con su correspondiente directriz, en una cónica de cualquier tipo, y un punto cualquiera **P** de la cónica. En el applet se debe dejar como única casilla activada ‘***Def. F-d***’. Sea **J** el punto en que la generatriz que pasa por **P** corta a la circunferencia **c**, y **Q** la proyección de **P** sobre la directriz **d**, ambos en el plano **m**. Sea **L** la



proyección del punto **P** sobre el plano **m**. Los segmentos **PF** y **PJ** son tangentes trazadas desde **P** a una misma esfera, por lo que son de igual longitud. Tenemos que:

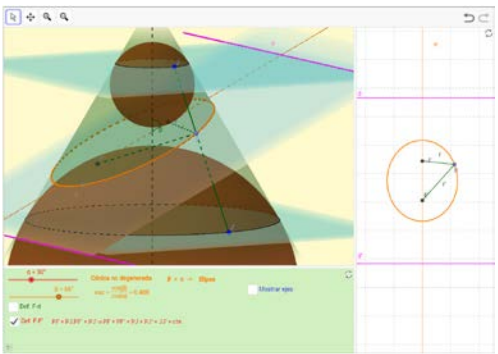
$$\overline{PL} = \overline{PJ} \cdot \cos(\alpha) = \overline{PQ} \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PJ}}{\overline{PQ}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = e$$

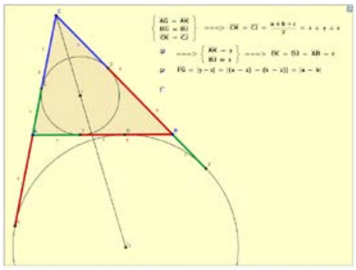
Es decir, que el cociente de distancias de un punto cualquiera de la cónica al foco y a su correspondiente directriz, es constante, la excentricidad. Podemos dar entonces una primera definición de cónica como lugar geométrico plano, común para los tres tipos: "***una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija, llamada directriz, es constante***". Se trata de una elipse, parábola o hipérbola según que tal constante sea menor, igual o mayor que 1.

4. SEGUNDA DEFINICIÓN DE LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

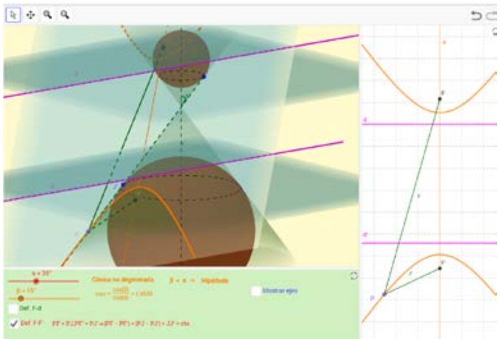
De lo expuesto anteriormente se deduce la definición usual en los textos de parábola: "*Lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz*". Para obtener las de elipses e hipérbolas consideramos las dos esferas tangentes a la superficie cónica y al plano sección en los focos, siguiendo la genial demostración del matemático franco-belga *Germinal Pierre Dandelin* (1794-1847). Activamos ahora la casilla ‘***Def. F-F***’.



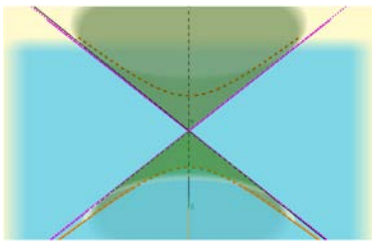
En el caso de la elipse, trazamos la generatriz que pasa por un punto cualquiera de ella P. Esta generatriz corta a las circunferencias c y c', en las que las esferas son tangentes al cono, en los puntos J y J'. Pero los segmentos PF y PJ son tangentes a una misma circunferencia desde el punto P, por lo que tienen la misma longitud. Otro tanto le ocurre a los segmentos PF' y PJ'. Por lo tanto, la suma $\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PJ} + \overline{PJ'} = \overline{JJ'}$ es independiente del punto P elegido. Entonces, "*La* *elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos llamados focos es constante*". Que esta constante es precisamente la longitud AA' entre los vértices de la elipse puede razonarse muy fácilmente considerando las circunferencias [inscrita y ex-inscrita a un triángulo] en el triángulo VAA', pero también puede aplazarse hasta la obtención de la ecuación reducida de la elipse. Esta propiedad de la elipse era conocida desde la antigüedad, pero las esferas de *Dandelin*, que ahora parecen evidentes, facilitan mucho su demostración.



Para la hipérbola, la construcción es similar, aunque algo más difícil de visualizar. Ahora los puntos J y J' están en una misma de las semirrectas definidas por P en la generatriz, por lo que es la diferencia |PJ – PJ'| = JJ' lo que es constante con independencia de P. La diferencia tiene un signo en una rama de la hipérbola y el opuesto en la otra.



Si consideramos el plano que pasa por el vértice y es paralelo al que produce la hipérbola, vemos que corta al cono en dos generatrices. Éstas son las dos generatrices que no cortan a la hipérbola. Si giramos la figura de manera que el centro de la hipérbola, punto medio entre los focos, se superponga al vértice del cono, apreciamos como la hipérbola se ajusta a aquellas generatrices. Las rectas paralelas a ellas que pasan por el centro de la hipérbola son entonces las asíntotas de la hipérbola, rectas a las que se aproxima indefinidamente sin llegar a alcanzarlas.

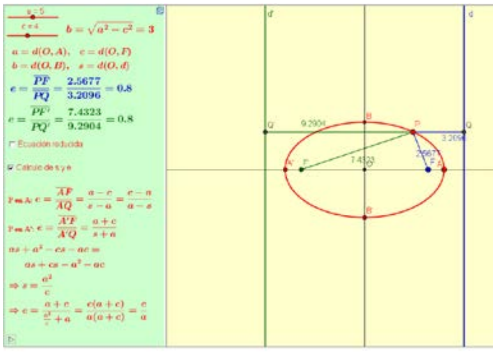


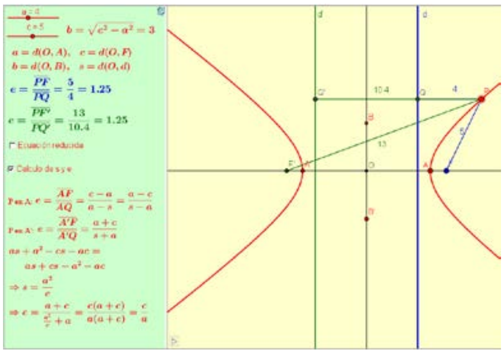
A partir de estas definiciones ya es sencillo obtener las ecuaciones reducidas de las cónicas. Para relacionar, para elipses e hipérbolas, la excentricidad definida como $\boldsymbol{e} = \frac{\cos(\boldsymbol{\beta})}{\cos(\boldsymbol{\alpha})}$ o como cociente de distancias a un foco y a su directriz correspondiente, con la definición habitual en los textos **e = c/a**, siendo **c** la semidistancia focal y **a** el semieje principal, basta aplicar la primera definición de cónica a sus vértices principales A y A'. Siendo Q la proyección del foco F sobre la directriz que le corresponde, teniendo en cuenta que Q se encuentra entre F y A y la simetría de la cónica respecto de su centro, se tiene:

$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AQ}} = \frac{a-c}{s-a} = \frac{c-a}{a-s}\ , \quad e = \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'Q}} = \frac{a+c}{s+a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a-c}{s-a} = \frac{a+c}{s+a} \quad \Rightarrow$$

$$as + a^2 - cs - ac = as + cs - a^2 - ac \quad 2a^2 = 2cs \quad \Rightarrow \quad s = \frac{a^2}{c}$$

$$e = \frac{a+c}{\frac{a^2}{c}+a} = \frac{(a+c)c}{a(a+c)} = \frac{c}{a}$$





En el caso de la elipse es **c** < **a** < **s**, y en el de la hipérbola es **c** > **a** >**s**, por lo que el desarrollo es válido en ambos casos.

5. REFERENCIAS

[1] Boyer, C.B. (1986): "Historia de la matemática". Madrid. Alianza Universidad.

[2] Burgos Román, J., Gil Martos, J. y Garzo Pérez, F. (1991): "Matemáticas 3º BUP". Madrid. Santillana.

[3] Grupo Edebé (2002): "Matemáticas I". Barcelona.

[4] Grupo SM (2011): "Matemáticas I". Madrid.

[5] Kline, M. (1992): "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I". Madrid. Alianza Universidad.

[6] Puig Adam, P. (1978): "Curso de Geometría Métrica. Tomo II, Complementos". Madrid. Pedro Gómez Puig.